

УДК 629.7

ДИНАМИКА СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

© 2015 г. В. А. Сарычев¹, С. А. Гутник^{2,3}

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

²Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

³Московский государственный институт международных отношений

vas31@rambler.ru, s.gutnik@inno.mgimo.ru

Поступила в редакцию 02.09.2014 г.

Исследована динамика вращательного движения спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Предложен метод определения всех положений равновесия (равновесных ориентаций) спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора аэродинамического момента и главных центральных моментов инерции, получены условия их существования в зависимости от четырех безразмерных параметров задачи. Найдены бифуркационные значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия. Проведен численный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесия в пространстве безразмерных параметров. Рассмотрена взаимосвязь полученных областей существования с областями существования положений равновесия осесимметричного спутника. Показано, что число положений равновесия спутника в общем случае не превышает 24 и не может быть меньше 8.

DOI: 10.7868/S0023420615060072

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение спутника – твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Для записи уравнений движения введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника.

$OXYZ$ – орбитальная система координат. Ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника.

$Oxyz$ – связанная со спутником система координат; Ox , Oy , Oz – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием углов Эйлера ψ , ϑ , φ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в орбитальной системе координат выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений [1]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(x, X) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi, \\ a_{12} &= \cos(y, X) = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi, \\ a_{13} &= \cos(z, X) = \sin \psi \sin \vartheta, \\ a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi, \\ a_{22} &= \cos(y, Y) = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi, \\ a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos \psi \sin \vartheta, \\ a_{31} &= \cos(x, Z) = \sin \vartheta \sin \varphi, \\ a_{32} &= \cos(y, Z) = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - \\ - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - \\ - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - \\ - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) &= 0; \\ p &= \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta} \cos \varphi + \omega_0 a_{21} = \bar{p} + \omega_0 a_{21}, \\ q &= \dot{\psi}a_{32} - \dot{\vartheta} \sin \varphi + \omega_0 a_{22} = \bar{q} + \omega_0 a_{22}, \\ r &= \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + \omega_0 a_{23} = \bar{r} + \omega_0 a_{23}. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (2), (3)

$$H_1 = -Qa/\omega_0^2, \quad H_2 = -Qb/\omega_0^2, \quad H_3 = -Qc/\omega_0^2;$$

A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r – проекции угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите; Q – действующая на спутник сила сопротивления; a, b, c – координаты центра давления спутника в системе координат $Oxyz$. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Уравнения (2), (3) получены при следующих предположениях [1]:

1) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха;

2) влияние атмосферы на поступательное движение спутника пренебрежимо мало;

3) увлечением атмосферы вращающейся Земли пренебрегается.

Предположение 1) достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой к сферической.

Для уравнений движения (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии [1]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + \\ & + (B-C)a_{32}^2] + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2 + (B-C)a_{23}^2] - \\ & - \omega_0^2(H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА

Положив в (2) и (3) $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned} (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{13} + H_3a_{12} &= 0, \\ (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{11} + H_1a_{13} &= 0, \\ (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. В дальнейшем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned} Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\ 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + \\ + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) &= 0, \\ (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - \\ - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

которая получается проектированием уравнений (5) на оси орбитальной системы координат.

Систему (6) с использованием безразмерных параметров $h_i = H_i/(B-C)$ ($i = 1, 2, 3$), $v = (B-A)/(B-C)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} va_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} &= 0, \\ -3(va_{11}a_{31} + a_{13}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\ va_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} + (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (1) систему (6) или (7) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Другой способ замыкания уравнений (6) или (7) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений (6), (8) была решена для некоторых частных случаев. В статьях [2, 3] для случая, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника ($h_1 \neq 0, h_2 = h_3 = 0, A \neq B \neq C$), аналитически определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Для каждого положения равновесия спутника получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости. Исследована эволюция областей устойчивости в зависимости от двух безразмерных параметров задачи. Более сложный случай, когда центр давления аэродинамических сил лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника ($h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$), рассмотрен в [4]. Здесь предложен метод численного определения всех положений равновесия в зависимости от трех безразмерных параметров задачи, получены достаточные условия их устойчивости. И, наконец, в статье [5] были исследованы положения равновесия осесимметричного спутника ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B = C$).

Далее будем исследовать положения равновесия спутника в общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$), используя системы (6) и (8).

Уравнения (6) и (8) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно 9 неизвестных направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных A, B, C, H_1, H_2, H_3 требуется определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника.

Как показано в [1, 2], систему уравнений (6), (8) можно разрешить относительно $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ при $A \neq B \neq C$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3(I_3 - A)a_{31}}{F}, & a_{21} &= \frac{3(B - C)a_{32}a_{33}}{F}, \\ a_{12} &= \frac{3(I_3 - B)a_{32}}{F}, & a_{22} &= \frac{3(C - A)a_{33}a_{31}}{F}, \\ a_{13} &= \frac{3(I_3 - C)a_{33}}{F}, & a_{23} &= \frac{3(A - B)a_{31}a_{32}}{F}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $F = H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}$, $I_3 = Aa_{31}^2 + Ba_{32}^2 + Ca_{33}^2$.

Подставляя уравнения (9) во второе и третье уравнение (6) и добавляя третье уравнение (8) получим три уравнения [3, 4]

$$\begin{aligned} &9[(B - C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C - A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + \\ &+ (A - B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33})^2, \\ &3(B - C)(C - A)(A - B)a_{31}a_{32}a_{33} - \\ &- [H_1(B - C)a_{32}a_{33} + H_2(C - A)a_{33}a_{31} + H_3(A - B) \times \\ &\times a_{31}a_{32}] (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}) = 0, \\ &a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

для определения направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} . После решения системы (10) формулы (9) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов.

Уравнения (9) и (10) после перехода к безразмерным параметрам принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3[va_{32}^2 - (1 - v)a_{33}^2]a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{21} &= \frac{3a_{32}a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\ a_{12} &= \frac{-3(va_{31}^2 + a_{33}^2)a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\ a_{22} &= \frac{-3(1 - v)a_{33}a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{3[(1 - v)a_{31}^2 + a_{32}^2]a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{23} &= \frac{-3va_{31}a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}; \\ &9[a_{32}^2 a_{33}^2 + (1 - v)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + v^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\ &= (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2), \\ &3v(1 - v)a_{31}a_{32}a_{33} - [h_1 a_{32}a_{33} - h_2(1 - v)a_{33}a_{31} - \\ &- h_3 va_{31}a_{32}] (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \\ &a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что правая часть первого уравнения (12) умножена на $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$. Учитывая однородность первых двух уравнений системы (12), разделим обе части первого уравнения на a_{33}^4 , второго уравнения на a_{33}^3 и получим алгебраическую систе-

му двух уравнений относительно переменных $x = a_{31}/a_{33}, y = a_{32}/a_{33}$:

$$\begin{aligned} &9[y^2 + (1 - v)^2 x^2 + v^2 x^2 y^2] = \\ &= (h_1 x + h_2 y + h_3)^2 (1 + x^2 + y^2), \\ &3v(1 - v)xy - [h_1 y - h_2(1 - v)x - \\ &- h_3 vxy](h_1 x + h_2 y + h_3) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, подставляя выражения $a_{31} = xa_{33}, a_{32} = ya_{33}$ в последнее уравнение системы (12), получим выражение

$$a_{33}^2 = (1 + x^2 + y^2)^{-1}. \quad (14)$$

Систему уравнений (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &a_0 y^2 + a_1 y + a_2 = 0, \\ &b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} &a_0 = h_2(vh_3x - h_1), & a_1 &= vh_1h_3x^2 - h_1h_3 + \\ &+ [3v(1 - v) - h_1^2 + (1 - v)h_2^2 + vh_3^2]x, & a_2 &= (1 - v)h_2 \times \\ &\times (h_1x + h_3)x, & b_0 &= h_2^2, & b_1 &= 2h_2(h_1x + h_3), \\ &b_2 = (h_2^2 + h_3^2 - 9) + 2h_1h_3x + (h_1^2 + h_2^2 - 9v^2)x^2, \\ &b_3 = 2h_2(h_1x + h_3)(1 + x^2), \\ &b_4 = (h_1x + h_3)^2(1 + x^2) - 9(1 - v)^2x^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Результант $R(x)$ уравнений (15) имеет следующий вид:

$$R(x) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $R(x) = 0$ с использованием символьных функций системы компьютерной алгебры Mathematica можно представить в виде

$$\begin{aligned} &p_0x^{12} + p_1x^{11} + p_2x^{10} + p_3x^9 + p_4x^8 + p_5x^7 + p_6x^6 + \\ &+ p_7x^5 + p_8x^4 + p_9x^3 + p_{10}x^2 + p_{11}x + p_{12} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} &p_0 = h_1^4 h_3^4 v^6, \\ &p_1 = -2h_1^3 h_3^3 v^5 [2h_1^2 + (1 - v)h_2^2 - 2vh_3^2 - 3v(1 - v)], \\ &p_2 = h_1^2 h_3^2 v^4 [6h_1^4 + h_1^2 (h_2^2 (v^2 - 8v + 7) + \\ &+ h_3^2 (v^2 - 16v + 1) + 17v^2 - 16v - 1) + h_2^4 (1 - v)^2 + \\ &+ h_2^2 (1 - v) + 3v^2 (2h_3^4 + 3h_3^2 (1 - v^2) + 3(1 - v)^2)], \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
p_{10} &= h_1^2 h_3^2 [6h_1^4 + h_1^2 (h_2^2 (v^2 - 8v + 7) + \\
&+ h_3^2 (v^2 - 16v + 1) - 9(1 - v^2) + h_2^4 (1 - v)^2 + \\
&+ h_2^2 (1 - v) (h_3^2 (1 - 7v) + v^3 - v^2 + 9v - 9) \\
&+ v^2 (6h_3^4 - h_3^2 (v^2 + 16v - 17) + 9(1 - v)^2)], \\
p_{11} &= 2h_1^3 h_3^3 [2h_1^2 + (1 - v)h_2^2 - 2vh_3^2 - 3v(1 - v)], \\
p_{12} &= h_1^4 h_3^4.
\end{aligned}$$

Коэффициенты p_i ($i = 3, \dots, 9$) представляют собой очень громоздкие выражения (полностью эти коэффициенты приведены в [6]).

Число действительных корней полученного алгебраического уравнения (17) четно и не превышает 12. Подставляя значение действительного корня x_1 уравнения (17) в уравнения системы (15), найдем совпадающий корень y_1 этих уравнений. Для каждого решения (x_1, y_1) из уравнения (14) можно определить два значения a_{33} , а затем и соответствующие им величины $a_{31} = x_1 a_{33}$ и $a_{32} = y_1 a_{33}$. Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения (17) соответствуют два набора значений a_{31}, a_{32}, a_{33} , которые, в силу (11), однозначно определяют остальные направляющие косинусы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. Из приведенных соображений следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$) может иметь не более 24 положений равновесия.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА

Уравнения (15) и (17) совместно с системами (11) и (12) позволяют определить все положения равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов при заданных значениях параметров задачи.

Для исследования положений равновесия спутника ставится задача нахождения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (17). Разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней уравнения определяется дискриминантной гиперповерхностью, которая задается дискриминантом многочлена (17). В символьном виде исследовать систему алгебраических уравнений, которая определяет множество особых точек дискриминантной гиперповерхности, в силу громоздкости выражений коэффициентов многочлена (17) не представляется возможным.

Зависимость числа действительных решений уравнения (17) от значений параметров исследо-

валась численно с использованием пакета факторизации системы Mathematica 8.0, который позволяет вычислять корни алгебраических уравнений с заданной точностью.

Не нарушая общности, численные исследования можно проводить при условии $B > A > C$, тогда $0 < v < 1$. Проекция вектора аэродинамического момента h_1, h_2, h_3 могут принимать любые ненулевые значения.

Коэффициенты уравнения (17) зависят от 4 безразмерных параметров v, h_1, h_2, h_3 , а в уравнения исходной системы (6) входят 6 параметров H_1, H_2, H_3, A, B, C . При численном исследовании задачи уменьшение числа параметров имеет существенное значение.

Как показано в работе [5], для предельных случаев $v = 0$ и $v = 1$ (случаи осесимметричного спутника) границы между областями с постоянным числом равновесий определяются аналитически.

Для осесимметричного случая $v = 0$ ($A = B$) система уравнений (7) упрощается и в результате можно получить уравнения двух окружностей в плоскости (h_1, h_2) , которые определяют границы областей с постоянным числом положений равновесия спутника:

$$h_1^2 + h_2^2 = (3^{2/3} - h_3^{2/3})^3, \quad h_1^2 + h_2^2 = (1 - h_3^{2/3})^3. \quad (18)$$

Для осесимметричного случая $v = 1$ ($A = C$) система уравнений (7) также упрощается и в результате можно получить уравнения двух астронид в плоскости (h_1, h_2) , которые определяют границы областей с постоянным числом положений равновесия спутника:

$$h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} = 3^{2/3}, \quad h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} = 1. \quad (19)$$

Рассмотрим более подробно свойства алгебраического уравнения (17). Из вида коэффициентов уравнения (17), приведенных в [6], следует, что число его действительных корней не зависит от знаков параметров h_1, h_2, h_3 . Действительно, в выражения для коэффициентов уравнения (17) при четных степенях x p_{2k} ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) параметры h_1, h_2, h_3 входят только в четной степени, а коэффициенты при нечетных степенях x p_{2k+1} ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) представляют собой произведение сомножителей $p_{2k+1} = h_1 h_3 P_{2k+1}$, где множитель P_{2k+1} зависит только от четных степеней параметров h_1, h_2, h_3 . Следовательно, при изменении знаков параметров h_1, h_2, h_3 может изменяться лишь знак произведения $h_1 h_3$ и, тем самым, знак действительных корней уравнения (17). Абсолютные величины действительных корней и их число остаются при этом неизменными.

Численный анализ числа действительных корней уравнения (17) проводился при положитель-

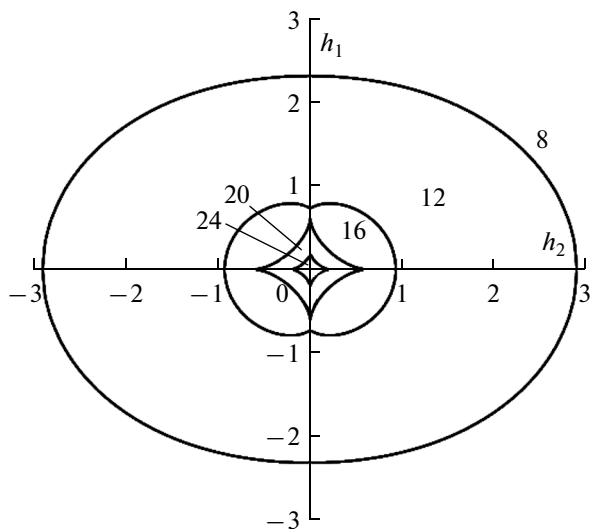


Рис. 1. Области существования равновесных ориентаций ($v = 0, h_3 = 0.01$).

ных значениях h_1, h_2, h_3 и при условии $0 < v < 1$. Вычисления проводились в узлах равномерной сетки на плоскости (h_1, h_2) при фиксированных значениях v и h_3 . Численно определялись граничные точки, в которых происходит смена числа действительных корней. Фактически вычислялся двумерный срез дискриминантной гиперповерхности, который задается неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(h_1, h_2) = 0$. Экспериментальным путем было определено, что для получения гладких граничных кривых требуются вычисления с шагом сетки 0.0001. Вычисления с такой точностью становятся очень трудоемкими. Действительно, для размера области 3×3 на плоскости (h_1, h_2) требуется вычисление корней в 10^9 уз-

Бифуркационные значения v, h_3

v	$h_3(24/20)$	$h_3(20/16)$	$h_3(16/12)$	$h_3(12/8)$
0.01	0.99	1.0	2.97	3.0
0.1	0.90	1.0	2.7	3.0
0.2	0.80	1.0	2.4	3.0
0.3	0.70	1.0	2.1	3.0
0.4	0.60	1.0	1.8	3.0
0.5	0.50	1.0	1.5	3.0
0.6	0.40	1.0	1.2	3.0
0.7	0.30	0.9	1.0	3.0
0.8	0.20	0.6	1.0	3.0
0.9	0.10	0.3	1.0	3.0
0.99	0.01	0.03	1.0	3.0

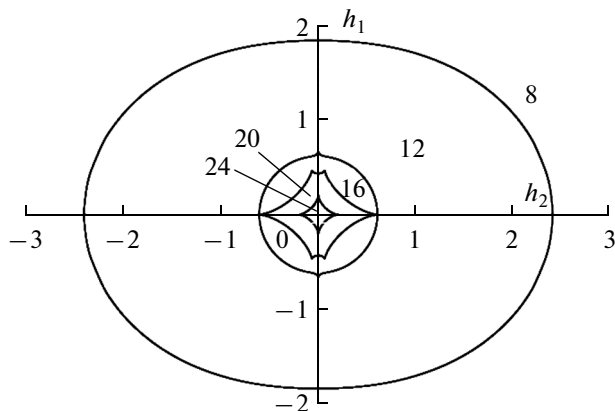


Рис. 2. Области существования равновесных ориентаций ($v = 0.2, h_3 = 0.15$).

лах. Поэтому вычисления проводились в два этапа. На первом этапе проводилось определение числа действительных корней уравнения (17) в 10^7 узлах с шагом 0.001. На втором этапе число действительных корней определялось в окрестности приближенно вычисленной границы между областями с постоянным числом действительных корней в узлах сетки с шагом 0.0001.

Далее при фиксированных значениях h_2 величина граничных точек h_1 между двумя областями с различным постоянным числом действительных корней определялась с заданной точностью методом деления отрезка пополам, реализованном на языке программирования системы Mathematica в виде пакета. Численные методы решений уравнений, реализованные в системе Mathematica, позволяют вычислять корни алгебраического уравнения при очень малых величинах коэффициентов.

На рис. 1–10 представлены результаты вычислений эволюции границ между областями с равным числом действительных корней на плоскости (h_1, h_2) для значений $v = 0.2, v = 0.5, v = 0.8$.

Из анализа численных результатов для заданных параметров v следует, что при увеличении параметра h_3 размеры областей с постоянным числом действительных корней уменьшаются. Точки в пространстве параметров, начиная с которых исчезают области с определенным числом действительных корней, будем называть бифуркационными точками. Результаты вычислений бифуркационных значений параметров представлены в таблице.

Вычисления на рис. 1–10 были проведены для бифуркационных значений параметра h_3 , указанных в таблице, и для значений h_3 , соответствующих среднему значению расстояния между двумя соседними бифуркационными точками.

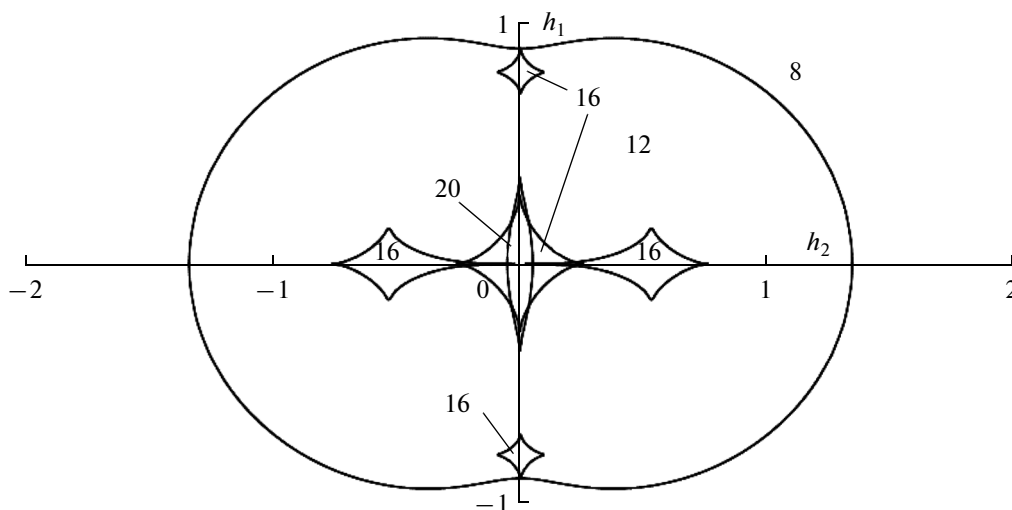


Рис. 3. Области существования равновесных ориентаций ($v = 0.2, h_3 = 0.8$).

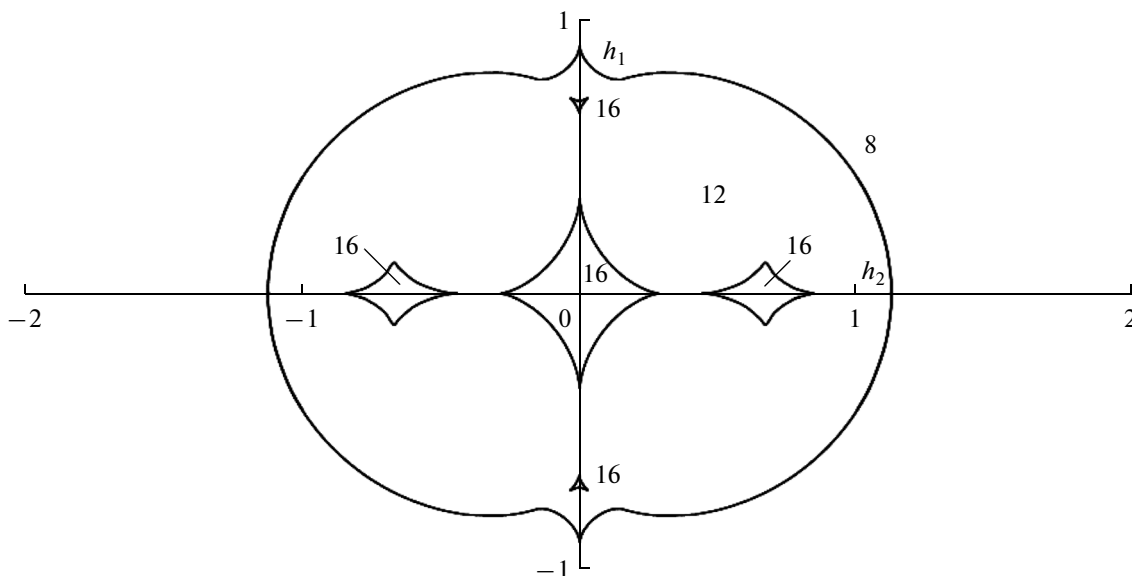


Рис. 4. Области существования равновесных ориентаций ($v = 0.2, h_3 = 1.0$).

Из таблицы следует, что бифуркационные значения параметра h_3 , при которых исчезают области существования 24 равновесных решений (12 действительных корней), удовлетворяют соотношению $h_3 = 1 - v$.

Бифуркационные значения параметра h_3 , при которых исчезают области существования 20 равновесных решений (10 действительных корней), равны 1 при возрастании значения v вплоть до значения $v = 0.6$, после чего уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - v)$.

Для областей, где существуют 16 равновесных решений (8 действительных корней), бифуркационные значения параметра h_3 уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - v)$ при возрастании значения v вплоть до значения $v = 0.6$, после чего остаются равными 1.

Области с числом положений равновесия, равным 12, уменьшаются при возрастании величины параметра h_3 . Центральная часть этих областей исчезает при $h_3 = 3$. При значениях $h_3 \geq 3$ суще-

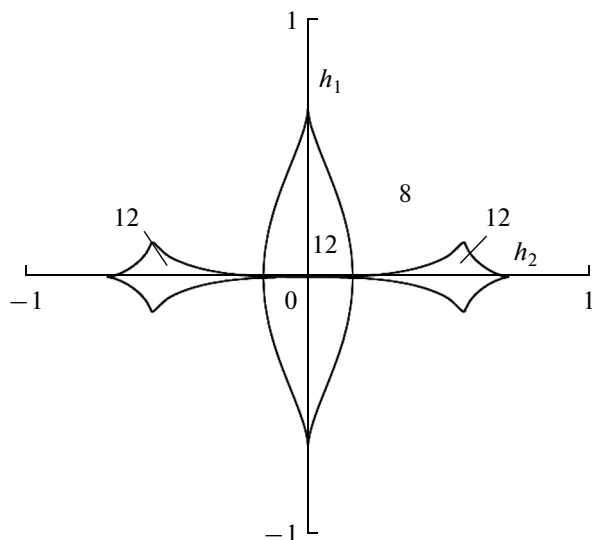


Рис. 5. Области существования равновесных ориентаций ($v = 0.2$, $h_3 = 2.4$).

ствуют области малых размеров с числом положений равновесия, также равным 12; эти области расположены вблизи оси Oh_2 с характерными размерами вдоль осей Oh_1 и Oh_2 , не превосходящими величину 10^{-1} . При возрастании величины h_3 эти области уменьшаются и смещаются вправо вдоль положительной части оси Oh_2 и влево вдоль отрицательной части оси Oh_2 .

Рассмотрим пример в окрестности осесимметричного случая $v = 0$ для значения $v = 0.01$. В данном случае вычисления проводились при значениях параметра $h_3 = 0.01$ (в окрестности нулевого значения). Кривые в этом случае очень схожи с

соответствующими кривыми на рис. 1 для осесимметричного случая $v = 0$, которые определяются уравнениями (18). Как показано в работе [5], в случае осесимметричного спутника число положений равновесия может быть только 16, 12 и 8 и, соответственно, существуют только 3 области в пространстве параметров с равным числом положений равновесия. В данном случае мы имеем только два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 3$.

Для значений инерционного параметра $v = 0.99$, близкого к осесимметричному случаю $v = 1$, вычисления границ областей проводилось при значениях $h_3 = 0.01$ (бифуркационная точка, где исчезает область с 24 положениями равновесия). Видно, что граничные кривые при значениях инерционного параметра, стремящегося к 1, приближаются к соответствующим аналитическим кривым для осесимметричного случая $v = 1$, которые определяются уравнениями (19). В данном случае мы имеем также два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 3$.

В интервале значений инерционного параметра $0.1 \leq v \leq 0.9$ было проведено численное исследование эволюции областей с постоянным числом положений равновесия 24, 20, 16, 12 и 8 (рис. 1–10). Рассмотрим подробнее характер изменения областей с числом положений равновесия, равным 24, 20, 16, 12 и 8, на примере, когда $v = 0.2$ (рис. 1–5).

Анализ численных результатов показывает, что при $v = 0.2$ области с числом положений равновесия, равным 24, 20, 16, 12 и 8, существуют в плоскости (h_1, h_2) при $h_3 < 0.8$ (рис. 1, 2). Из рис. 2 видно, что при возрастании величины h_3 размеры областей с числом положений равновесия, рав-

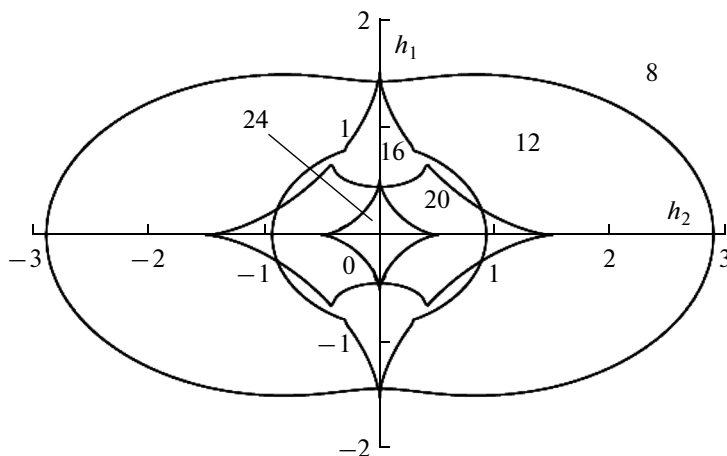


Рис. 6. Области существования равновесных ориентаций ($v = 0.5$, $h_3 = 0.01$).

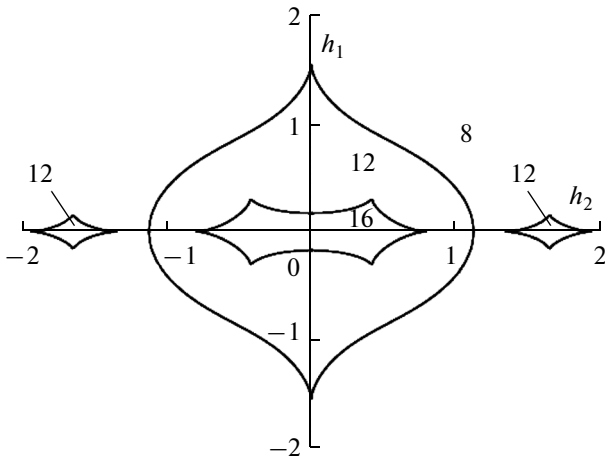


Рис. 7. Области существования равновесных ориентаций ($\nu = 0.5, h_3 = 1.0$).

ным 24, 20, 16, 12, становятся меньше, чем соответствующие области на рис. 1. При бифуркационном значении $h_3 = 0.8$ область с числом положений равновесия, равным 24, исчезает (рис. 3) и в интервале значений $0.8 < h_3 < 1.0$ существуют только четыре типа областей с числом положений равновесия, равным 20, 16, 12 и 8. При бифуркационном значении $h_3 = 1.0$ исчезает область с числом положений равновесия, равным 20 (рис. 4). В интервале значений $1.0 \leq h_3 < 2.4$ существуют только три типа областей с числом положений равновесия, равным 16, 12 и 8 (рис. 4).

При бифуркационном значении $h_3 = 2.4$ область с числом положений равновесия, равным 16, исчезает (рис. 5). В интервале $2.4 \leq h_3 < 3$ остаются только два типа областей с числом положений равновесия, равным 12 и 8. При $h_3 = 3.0$ области с числом положений равновесия, равным 12, исчезают в окрестности начала координат и при дальнейшем увеличении значений параметра h_3 вблизи оси Oh_2 появляются области малых размеров с числом положений равновесия, равным 12.

На рис. 6–10 представлена эволюция областей с постоянным числом положений равновесия для значений инерционных параметров $\nu = 0.5$ и $\nu = 0.8$.

Когда значения параметра аэродинамического момента h_3 превышает 3, при любых значениях параметров h_1 и h_2 существуют 8 положений равновесия спутника, которые соответствуют 4 действительным корням уравнения (17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование вращательного движения спутника относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Главное внимание уделено определению положений равновесия спутника в орбитальной системе координат. Предложен символично – численный метод определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора аэроди-

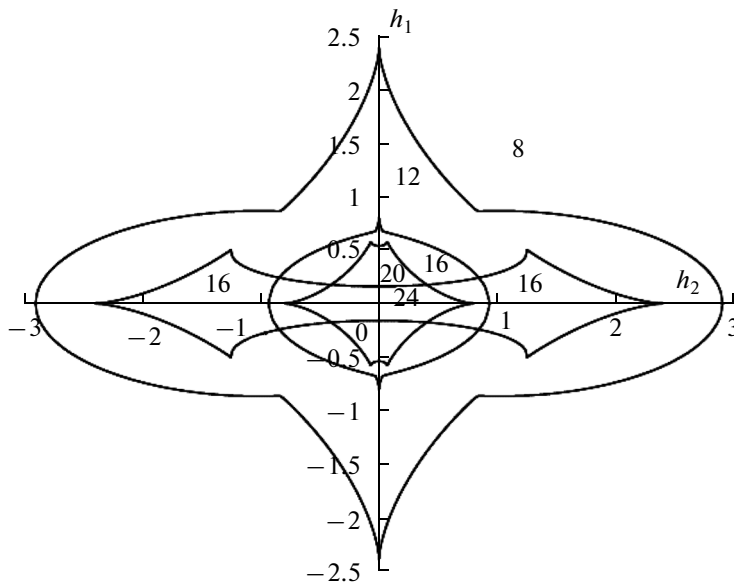


Рис. 8. Области существования равновесных ориентаций ($\nu = 0.8, h_3 = 0.01$).

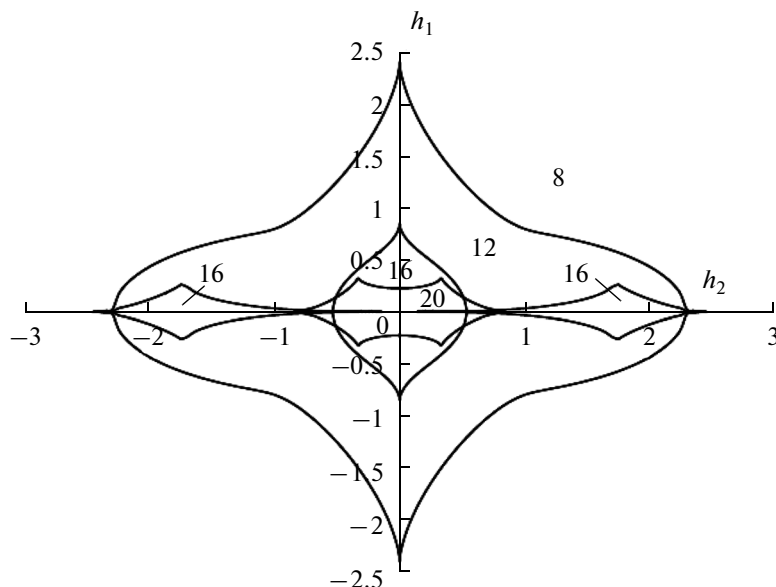


Рис. 9. Области существования равновесных ориентаций ($\nu = 0.8, h_3 = 0.2$).

намического момента и главных центральных моментов инерции в общем случае, когда $A \neq B \neq C$ и $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$.

Проведен детальный численный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесия в плоскости двух параметров (h_1, h_2) при различных значениях параметров ν и h_3 . Показано, что число положений равновесия спутника на круговой орбите в общем случае не превы-

шает 24 и не может быть меньше 8. Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования аэродинамической системы ориентации спутника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Серия "Исследование космического пространства". Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
2. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2000. V. 76. № 1. P. 55–68.
3. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2007. V. 97. № 4. P. 267–287.
4. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A. Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure center in a principal plane of inertia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. V. 100. № 4. P. 301–318.
5. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Космич. исслед. 2012. Т. 50. № 5. С. 394–402. (Cosmic Research. P. 367).
6. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 39.

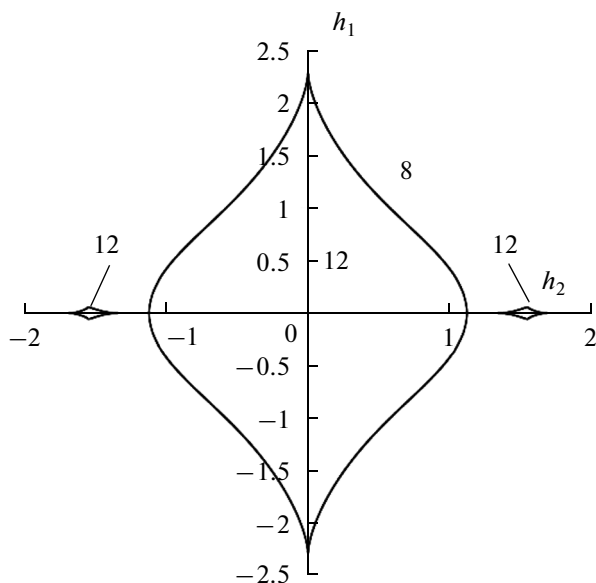


Рис. 10. Области существования равновесных ориентаций ($\nu = 0.8, h_3 = 1.0$).