УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
_____________ А. А. Воронов
09 января 2018 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРТК**
факультет: **ФРТК**
кафедра: **информатики и вычислительной математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зачет. ед.;

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – нет
лабораторные занятия – 30 часов

Экзамен – нет
Диф. зачёт – 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Самостоятельная работа: – 48 часов

Программу и задание составил
доцент А. В. Барабанщиков

Программа принята на заседании кафедры
информатики и вычислительной математики
13 ноября 2017 г.

Заведующий кафедрой
чл.-корр. РАН И. Б. Петров

1. *[1]Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). *Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (неявные методы Рунге–Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад). *Методы Гира в представлении Нордсика. *Исследование схем на A-устойчивость, L-устойчивость и монотонность.

2. Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). *Вариационно-разностные и проекционные методы построения приближенного решения. *Метод конечных элементов. Задача на собственные значения (Штурма–Лиувилля). *Понятие жесткой краевой задачи. *Методы решения жесткой линейной краевой задачи.

3. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. *Канонический вид двухслойных схем.

4. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. *Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем.

5. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. *Нелинейное уравнение Хопфа. *Понятие о сильных и слабых разрывах, скорость движения сильного разрыва.

6. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. *Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение.

Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.

---

[1] Знаком * помечены пункты вариативной части программы.

7. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. *Оценка количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.

8. *Введение в методы решения уравнений газовой динамики.

Литература

Основная

1. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. 3-е изд. — М.: Физматлит, 2008. — 288 с. — (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994. — 528 с.; 2-е изд. /под ред. А.И. Лобанова. — Долгопрудный: Интеллект, 2008. — 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. 3-е изд. — М.: Физматкнига, 2013. — 240 с.
4. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. — М.: Интернет–университет информационных технологий, 2006. — 522 с.
5. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
6. *Демченко В.В. и др*. Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Ч. 2. — М.: МФТИ, 2014. — 182 с.

Дополнительная

1. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». 2-е изд, испр. и доп. / В.Д. *Иванов.,В.И. Косарев., А.И. Лобанов ., И.Б. Петров., В.Б. Пирогов., В.С. Рябенький..,Т.К. Старожилова ., А.Г. Тормасов ., С.В. Утюжников., А.С.Холодов*. — М.: Изд-во МЗ-пресс, 2003. – 196 с.
2. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.

1-я контрольная работа – вторая декада марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи **–** вторая декада марта)
Задачи из Сборника задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенького. — М.: МФТИ, 1988: **VII.7, VII.8, VII.9(а,б), VII.12, VII.13.**

1. Найти все решения разностного уравнения
$u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = \cos(\pi n / 2)$.

2. Найти все решения системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1, \\ y_{n+1} = -2x_n - y_n. \end{cases}$$

3. Уравнение Ван-дер-Поля второго порядка можно записать в представлении Льенара:

$$\begin{cases} y' = -a\left(\dfrac{y^3}{3} - y\right) + p, \\ p' = -y \end{cases}$$

с условиями $y(0) = y_0 > 0$, $y'(0) = 0$, $0 \le t \le 3000$, $a >> 0$ $(100 \div 1\,000)$. Найти показатель жесткости рассматриваемой задачи в зависимости от параметра a. В какой части фазового пространства задача жесткая?

4*. Семейство неявных методов Рунге–Кутты.
Метод вида

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_{\text{n}} + c_1\tau, \mathbf{y}_{\text{n}} + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}\mathbf{k}_j), \ldots,$$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{f}(t_{\text{n}} + c_s\tau, \mathbf{y}_{\text{n}} + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}\mathbf{k}_j), \; \mathbf{y}_{\mathbf{n+1}} = \mathbf{y}_{\text{n}} + \tau\sum_{j=1}^{s} b_j\mathbf{k}_j,$$

где $\mathbf{k}_1,...,\mathbf{k}_s$ определяются как решение системы нелинейных уравнений, называется *неявным методом Рунге–Кутты порядка S* (*S-стадийным*). Как будет выглядеть для него таблица Бутчера?
Вывести условия аппроксимации порядка p ($p = 1, 2, 3, 4$, $s = 2$).
Обратите внимание, что для определения $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2,\dots,\mathbf{k}_s$ необходимо решать систему нелинейных уравнений. Какова ее размерность?
В чем состоит особенность методов с $a_{ij} = 0$ при $j > i$ (диагонально-неявные методы)?

5. Построить функцию устойчивости для всех явных методов Рунге–Кутты 1, 2, 3 и 4 порядков аппроксимации, для которых число стадий равно порядку аппроксимации.

6. Для системы

$$\dot{x}_1 = 98x_1 + 198x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -99x_1 - 199x_2$$

численное решение получают явными методами Рунге–Кутты 1, 2, 3 и 4 порядков аппроксимации, число стадий равно порядку аппроксимации. При каких шагах τ методы устойчивы?

7*. Рассматривается следующее однопараметрическое семейство однократно диагонально неявных методов Рунге–Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Найти все значения параметра γ, при которых:
а) метод имеет третий порядок аппроксимации,
б) метод является A-устойчивым,
в) метод является монотонным.

8. Показать, что метод трапеций для решения жестких задач Коши является A-устойчивым, но не является L-устойчивым.

9*. Исследовать на устойчивость ФДН-метод

$$3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2} = 2\tau f_n$$

для решения обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{y} = f(t, y)$. Какой у него порядок аппроксимации?

10. Найти все λ, для которых разностная задача имеет нетривиальное решение:

а) $\dfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}=(2-\lambda)u_n, \quad u_0=u_1, \quad u_N=0, \quad hN=1, n=1, \ \ldots, \ N-1,$

б) $\dfrac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}=-\lambda u_n, \quad u_0=0, \quad u_N=u_{N-1}, \quad hN=1, n=1, \ \ldots, \ N-1.$

Какую дифференциальную задачу аппроксимирует разностная задача ?
К чему стремится решение при $N \to \infty$?

11. С помощью метода Бубнова–Галеркина построить приближенное решение краевой задачи на сетке
$D_h=\left\{x_n : x_n=nh \ , n=0\div 2, h=\pi/2\right\}$, используя одну базисную функцию

$$\begin{cases} y''(x)+\cos(x)y'(x)+2\cos(x)y(x)/\pi=1-4x\cos(x)/\pi^2, \\ y(0)=1, y(\pi)=-1, x\in[0,\pi], \end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} 0, & |x-\pi/2|\geq \pi/2, \\ \sin(x), & |x-\pi/2|\leq \pi/2 \end{cases}.$$

Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Жесткая задача Коши для систем ОДУ.
2. Краевая задача для систем ОДУ.

Задачи для практического решения на ЭВМ даются преподавателем в группе каждому студенту индивидуально по соответствующим разделам программы.

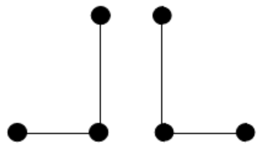
2-я контрольная работа — вторая декада мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи **–** вторая декада мая)
Задачи из Сборника задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенького. — М.: МФТИ, 1988: **VIII.1, VIII.4, VIII.5, VIII.2, VIII.3, VIII.6, VIII.7, VIII.9, IX.1(а), IX.3, IX.4, II.9.**

1. Преобразовать систему уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), & 0 \le t \le T, \quad -\infty < x < \infty, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), & u(0,x) = \varphi(x), \quad v(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

к характеристической форме и для ее решения предложить сходящуюся разностную схему, используя шаблоны «явный левый уголок» и «явный правый уголок»:



2. Какие из предложенных вариантов начальных и граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), & 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

1) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,0) = \psi_0(t),\ u(t,1) = \psi_1(t),$

2) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,0) = \psi_0(t),\ v(t,1) = \psi_1(t),$

3) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,0) = \psi_0(t),\ v(t,0) = \psi_1(t),$

4) $u(0,x) = \varphi_0(x),\ v(0,x) = \varphi_1(x),\ u(t,0) = \psi_0(t),\ -2u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t).$

Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:
1. Волновое уравнение.
2. Уравнение теплопроводности.
3. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.
4. Реализация разностной схемы для нелинейного уравнения или системы нелинейных уравнений в частных производных.

Задачи для практического решения на ЭВМ даются преподавателем в группе каждому студенту индивидуально по соответствующим разделам программы.