УДК 519.8
ББК 22.18

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский Физико-Технический Институт
(Государственный университет)»
Центр развития ИТ-образования

Материалы Летней Олимпиадной Школы

Летняя олимпиадная школа

• МФТИ, 2016 •

Введение в теорию игр и исследование операций

Бабичева Татьяна Сергеевна, Бабичев Сергей Леонидович

Введение

В данном методическом пособии описаны и обобщены лекции по теории игр, прочитанные на Летней Олимпиадной Школе в 2016 году.

Курс ориентирован на школьников 8-11 классов и просто всех тех, кто интересуется теорией игр. Данный курс не требует предварительной математической и экономической подготовки.

О чём же данный курс?

Что такое исследование операций? Это не те операции, в которых кого-то разрезают и вытащенное исследуют.

Исследование операций — применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности. Исследование операций начинается тогда, когда для обоснования решений применяется тот или другой математический аппарат.

Ну, что такое игра, в принципе, все слышали, да и сталкивались с различными играми не раз. Но как связаны исследование операций и игры? И причём же здесь математика?!

Начнём с главного вопроса — что же вообще такое теория игр?

Игра начинается всякий раз, когда люди как-то пытаются взаимодействовать друг с другом.

Ромео и Джульетта сыграли в игру «давай поженимся», но из-за неполной информации, да и других факторов, проиграли оба.

Выезжая из дома на работу, каждый участник дорожного движения играет в игру взаимодействия с остальными участниками, пытаясь минимизировать своё время в пути. Кстати, об этом мы ещё упомянем при введении понятия транспортного равновесия.

Аукцион — это совсем явный вид игры, как и вообще любые сделки и назначения цен. Например, если я решу открыть очередную столовую на физтехе, мне придётся сыграть в большую игру с руководством других столовых, толпой студентов и другими сторонами.

Даже когда вы будете устраиваться на работу, вы будете играть в игру «Я хочу ВОООТ столько денег, но и вооот столько подойдёт. Сколько бы попросить, чтобы и меня приняли на работу, и мне досталось как можно больше?»

Как вы уже поняли, теория игр — одна из весьма важных тем.

Естественно, специалисты в теории игр не утверждают, что могут дать ответы на все проблемы в мире. Лучшее, что они могут понять — что происходит, когда люди взаимодействуют рациональным образом.

Хорошо, что многие люди не всегда ведут себя иррационально, хотя и не всех можно легко понять. Большинство из нас, по крайней мере, пытаются относительно грамотно тратить деньги, да и вообще не делать странных и непредсказуемых поступков большую часть времени; в противном случае, экономическая теория не могла бы существовать вообще.

Даже если кто-то поступает не подумав, это не обязательно означает, что он ведёт себя нерационально. Теория игр имеет некоторые успехи в объяснении поведения насекомых и растений, а уж способность думать у них, наверное, можно подвергнуть сомнению. Хотя, возможно, это просто из-за того, что сменилось настолько много поколений насекомых и растений, что те из них, кто имел в себе гены неадекватности, уже вымерли.

Так может, мы собрались проходить простую психологию? Может, предмет стоит назвать «методы рационального взаимодействия», а не «теория игр»?

На самом деле, мы будем рассматривать достаточно частный случай — мы будем рассматривать только рациональных игроков в условиях фиксированных «игрушечных» игр с известными правилами. Математика, которую мы будем использовать, будет достаточно простой, хотя некоторые экономические понятия, которые мы будем проходить, изучаются только в институтской программе.

Чтобы был стимул сыграть с вами в некоторые модельные игры, мы будем играть на баллы.

Изначально у каждого из вас будет по 100 баллов, в минус уходить нельзя. Тем из вас, у кого будет больше всех баллов к концу нашего курса, достанутся небольшие призы.

1 Игра с природой, или что такое математическое ожидание?

1.1 Что такое случайность?

Все мы знакомы (ну или думаем, что знакомы) с таким понятием, как «случайность». Какое представление вы имеете о значении этого термина? Кто мне может сказать, что это такое?

Самый распространённый ответ на подобный вопрос: «случайность возникает, когда происходят неожиданные вещи». А что такое неожиданные вещи? Я думаю, вы сами понимаете, что такое определение не даёт нам ровным счётом ничего.

Введём более формальное определение. «Случайность — это фактор, который определяет исход эксперимента из множества возможных исходов, известных заранее».

Но можем ли мы говорить о случайности, если мы не знаем заранее множество возможных исходов? Например, приходите вы на контрольную и получаете задачи. Являются ли они для вас случайными? А являются ли они случайными для вашего преподавателя? Подумайте об этом.

Случайность можно разделить на два различных типа:

Онтологическая случайность — случайность является частью бытия. Например, подбрасывание монетки можно отнести к данному типу случайности.

Эпистемологическая случайность — это случайность, которая возникает из-за незнания, невежества или невозможности понимания каких-то процессов, но на самом деле тут вполне всё предопределено. Например, приходите вы в школу и выясняете, что сегодня у вас будет контрольная. Вам кажется, что это случайно, а на самом деле это было давно запланировано на педагогическом совете. Но вы об этом просто не знали.... Фраза «Случайности не случайны» — как раз об этом типе.

Очень многие люди и по сей день, не говоря уже о более ранней поре, считали и считают, что онтологической случайности не существует, что вся случайность носит только эпистемологический тип. Большинство учёных от эпохи Просвещения до начала двадцатого века считали, что, возможно, мы просто не знаем, как именно что-то работает, но всё предопределено заранее. Течение, в котором утверждается, что всё предопределено, называется детерминизмом. На принципе детерминизма построена классическая физика, а вот в квантовой физике всё достаточно сложно, и философы, и физики пока сами не до конца определились. Например, Гольбах писал: «Ничего в природе не может произойти случайно; все следует определенным законам; эти законы являются лишь необходимой связью определенных следствий с их причинами... ». Особенно сильно данное мнение у дуалистов, утверждающих, что помимо материи существуют элементы метафизики, в том числе божественное начало. Очевидно, что случайность онтологическая абсолютно несовместима с принятием чего-то всемогущего и всезнающего.

Изучение философии, надеюсь, не пройдёт мимо вас — в большинстве высших учебных заведений она включена в программу, а в аспирантуре по любой специальности она вообще является основным предметом. Но добавлять в наш курс помимо математики, экономики и психологии ещё и философию было бы жестоко с моей стороны.

1.2 Что такое вероятность?

Никто не умеет предсказывать, упадёт монета, если её бросить, орлом, решкой или вообще ребром. Поэтому подбрасывание монеты так часто и используют для определения своего действия в спорной ситуации — например, идти ли на первый урок или остаться в постели.

В каких ситуациях мы бросаем монету? Когда хотим, чтобы за нас решила «судьба», то есть, чтобы одинаково вероятно нам попался любой из двух исходов (падение на ребро обычно исходом не считают и просто перебрасывают монетку). В таких случаях вероятность выпадения орла оценивают как $\frac{1}{2}$, ещё зачастую говорят о процентом соотношении орлов и решек «50 на 50».

Сколько примерно орлов выпадет, если мы подбросим монетку 1000 раз? Вероятность выпадения одного орла необходимо умножить на количество действий, так как, можно сказать, что в каждом броске в среднем у нас выпадает «пол-орла». Тогда получим, что в среднем выпадет 500 орлов.

Так что такое вероятность? Обычно в рамках школьной программы дают следующее определение:

Определение. Вероятностью называют отношение числа благоприятных исходов к общему количеству равновероятных исходов.

Что такое благоприятный исход? Например, выпадение орла при подбрасывании монетки. Общее количество исходов — это всё множество исходов — в данном случае «орёл и решка».

Зачем же в определении вероятности есть слово «равновероятных»? Может, стоит просто делить на количество исходов?

Данное определение можно проиллюстрировать следующим анекдотом:

Спрашивают блондинку: Какова вероятность того, что, выйдя на улицу, вы встретите динозавра.
Б: 50 процентов.
- Это как?????
Б: Ну, или я его встречу, или нет.. Тут каноническая блондинка

как раз и поделила один благоприятный исход «встречи с динозавром» на возможные два исхода.

Ну вы уже поняли, что оно так не работает. Мало того, если монетку подпилить, то она перестанет быть идеально симметричной и вероятности выпадения орла и решки теперь могут стать не равными. Так, например, поступают мошенники.

1.3 Игры с природой

Одна из главных причин популярности, да и вообще возникновения и развития теории вероятностей — это желание получить много денег сразу и без труда. Например, выиграть их в лотерею или в рулетку. Попытка найти закономерности и «обмануть систему» — это мощный стимул к развитию соответственного математического аппарата. Кажется, что если мы знаем законы вероятности и правила, которым подчиняется случайность, то мы сможем выиграть в любой игре, а в действительности это несбыточная мечта.

Главное, что мы должны понимать — игра является случайной, если игрок не может иметь вообще никакого влияния на исход игры. Например, шахматы неслучайны, преферанс не совсем случаен, а вот подбрасывание монеты, рулетка и даже русская рулетка — игры случайные. Будем называть те игры, в которых важную роль играет случай, пусть и подчинённый неким математическим зависимостям, «играми с природой». Можно играть только с природой, подбрасывая монетку. Можно сыграть с кем-то и природой — например, в «дурака». Тогда, с одной стороны, карты вам раздала природа (или шулер, но мы верим в доброту и честность людей, и вообще, колода у нас своя), но действия второго игрока уже неслучайны.

Есть ряд игр, в которых игроку суждено только приобрести билет и после этого никакого участия он не принимает. Игра в рулетку — пример другого класса игр, в которых игроку дают возможность выбрать ставку и тип игры. С математической точки зрения игра в рулетку не является справедливой, так как при любом типе игры в выигрыше всегда оказывается казино. А как мы определяем, справедливая ли игра? Для этого потребуется понятие математического ожидания, впервые введённого в 1671 году голландским математиком Яном де Виттом.

1.4 Математическое ожидание

Представим, что мы играем в какую-либо игру. Пока нам не важно, игра это с природой или с другим соперником. Пусть это будет игра в кости с игральным кубиком. За право сделать бросок мы платим 10 рублей. Если в сумме брошенных двух костей выпадет 7 очков, то нам дают 50 рублей, если выпадет другая сумма — ничего не дают. Выгодна ли эта игра? Стоит ли принимать в ней участие?

В этой игре нужно посчитать вероятность выпадения ровно 7 очков в сумме на двух костях. Всего существует ровно 36 **равновероятных** событий (мы полагаем, что в этой игре организаторы не являются такими явными шулерами, что предлагают плохие кубики), из них ровно 6 событий (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1) благоприятны. То есть, вероятность выигрыша — $p_{win} = \frac{1}{6}$. Вероятность проигрыша, соответственно, $p_{loss} = \frac{5}{6}$.

Исход броска — **случайная величина**.

Определение. Случайная величина может принимать в результате эксперимента неизвестные заранее значения из заданного множества.

В нашем случае множество возможных значений броска каждой из костей нам известно — это числа от 1 до 6. Нам неизвестно, какое же число выпадет после очередного броска, это — онтологическая случайность (если организаторы игры — шулеры, то для нас это было бы эпистемологической случайностью). Нас интересует средний выигрыш для одной игры.

Введём определение среднего выигрыша на более формальном языке:

Определение. Математическое ожидание случайной величины есть сумма произведения вероятностей появления всех возможных значений на величину этих значений. В нашем случае при успехе мы выигрываем 50 рублей, сумма выигрыша равна 40 рублям, (не забываем, что мы уже 10 рублей отдали!), а при неуспехе — проигрываем 0 рублей, сумма выигрыша равна минус десяти рублям. Итого:

$$E = p_{win} \cdot S_{win} + p_{loss} \cdot S_{loss} = \frac{1}{6} \cdot 40 + \frac{5}{6} \cdot -10 = -\frac{10}{6}.$$

Математическое ожидание выигрыша в данной игре отрицательное, то есть, игра для нас невыгодна. Чем больше партий мы в неё сыграем, тем большим будет математическое ожидание выигрыша (по модулю), а, значит, тем больше мы проиграем. Если математическое ожидание выигрыша за одну игру равно нулю, игра считается **справедливой**.

Понятие математического ожидания — достаточно базовая вещь, которая используется далеко не только в теории игр, но об этом попозже.

1.5 Парадокс дней рождений

Как определить, является ли игра справедливой? Иногда интуиция нас подводит. Например, предлагаю сыграть всем желающим из вас в следующую игру: если в этой аудитории найдётся хотя бы два человека, у которых один и тот же день рождения, то я отнимаю у каждого из играющих по 50 баллов. Если нет — то всем решившим рискнуть я начислю по 50 баллов. Справедлива или нет эта игра для вас? Давайте проверим.

Идёт процесс игры и обсуждения результатов

Вы рискнули, кто-то доволен своим поступком, кто-то нет. А теперь надо подвести под это дело математику.

Справедливая ли это игра для вас?

Давайте посчитаем несколько вероятностей. Выведем формулу, показывающую вероятность того, что в группе из n людей имеется хотя бы одна пара с одинаковыми днями рождения. Положим, что различных дней рождения — 366 и что все они равновероятны (на самом деле родившихся 29 февраля должно быть примерно в 4 раза меньше, чем родившихся 28 февраля, но сейчас это не так важно). Для двух человек вероятность совпадения равна $\frac{1}{366}$, следовательно, вероятность несовпадения — $\frac{365}{366}$. Будем добавлять по человеку в компанию и считать вероятность совпадения его дня рождения с уже рассмотренными — ведь если дней рождения до сих пор не совпало, их можно считать «занятыми» и нас будут интересовать только «свободные». Когда пришёл третий человек, искомая вероятность несовпадения стала $\frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366}$, так как было 364 «свободных» дня. Рассуждая подобным образом дальше, мы можем вывести формулу, определяющую вероятность несовпадения дней рождения ни для одной из пар в компании из n человек:

$$p_n = \frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366} \cdot \dots \cdot \frac{366-n}{366}$$

.

Дело за малым. Нужно просто вычислять это выражение до тех пор, пока произведение дробей не станет меньше единицы. На компьютере это сделать легче лёгкого. Получается, что уже при $n = 23$ дробь меньше $\frac{1}{2}$, так что, если в аудитории 23 человека, то игра уже выгодна для меня и невыгодна для вас.

1.6 Можно ли выиграть у казино?

Давайте рассмотрим ещё один пример, на этот раз он связан с другой популярной игрой с природой — рулеткой.

В интернете бывают все, всем приходили письма с предложением открыть секрет выигрыша в рулетку. Это могут быть не письма, а навязчивая реклама на сайте. Что же там предлагается, если мы предположили, что игра в рулетку несправедливая? Напомним, что на самой рулетке окружность разбита на 37 секторов, красных и чёрных, пронумерованных от 1 до 36 и зелёного «зеро». Имеется несколько вариантов игры: например, поставить на красное. Тогда при выпадении красного числа ставка удваивается. Вероятность выпадения красного $\frac{18}{37}$, чёрного $\frac{18}{37}$ и зеро $\frac{1}{37}$. Математическое ожидание выигрыша при ставке в единицу равно

$$E = \frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot -1 = -\frac{1}{37}.$$

Действительно, несправедливая игра. Хорошо, но ведь есть и другие варианты? Можно поставить на конкретное число и вам выплатят выигрыш в 36 раз больший, чем ставка. Подсчитаем математическое ожидание выигрыша?

$$E = \frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot -1 = -\frac{1}{37}.$$

Казино не обманешь, правила составлены именно таким образом, что математическое ожидание выигрыша для каждого из возможных вариантов игр в рулетку всегда ровно $-\frac{1}{37}$ от ставки. В американской рулетке правила ещё более жёсткие: там 38 секторов, среди которых два зеро. Давайте попробуем обмануть казино, воспользовавшись предлагаемым рецептом выигрыша. Для упрощения дальнейших выкладок положим невозможное: игра в рулетку — справедливая игра и математическое ожидание выигрыша равно нулю.

Итак, я первой ставкой назначаю один рубль и ставлю на красное. Если я выиграла, то выигрыш я откладываю на депозит в банке и больше его никогда не трогаю. Если я проиграла, то я ставлю два рубля опять на красное. При выигрыше выигранный рубль опять отправляется на депозит и я начинаю игру с самого начала. Я верю, что при любой сколь длинной серии обязательно выпадет красное, и тогда при такой стратегии, постоянно удваивая ставки при проигрыше и забирая деньги при выигрыше, я стану непобедимой. Права ли я?

Давайте посмотрим, чему равна вероятность выпадения чёрного цвета 20 раз подряд. Она будет равна $\frac{1}{2^{20}} \approx 10^{-6}$, то есть, примерно одной миллионной. Сколько денег я должна поставить очередной раз в этом случае? 2^{20}, то есть, примерно миллион рублей. Есть ли у меня такие деньги с собой? А если есть, то что же насчёт выпадения чёрного цвета 21 раз подряд? Это ведь уже примерно два миллиона? А 30 раз подряд? Это маловероятно, но ведь и проигрыш в этом случае получается астрономическим! Вторая проблема состоит в том, что в реальных казино максимальный размер ставок ограничен. Предположим, что больше миллиона рублей ставить нельзя. Мы только что с ужасом наблюдали, как шарик 19 раз подряд выпал на чёрное, для того, чтобы отыграться (ну не может же он и 20-й раз выпасть на чёрное) мы должны поставить 1048576 рублей, но правила ограничивают нашу ставку до 1000000 рублей. Даже если мне повезёт (а игроки верят, что им обязательно повезёт), то мне выплатят 1000000 рублей, а ведь я поставила уже 1048576 рублей. Мой чистый проигрыш составил 48576 рублей, и мне, чтобы отыграться, нужно успешно сыграть 48576 раз. А теперь вспомним, что вероятность выигрыша отнюдь не $\frac{1}{2}$, а $\frac{18}{37}$...

Подсчёт показывает, что даже при справедливой игре (что невозможно) за 20 лет постоянной игры вероятность выигрыша составляла 99%, то необходимо иметь не менее $2^{18} = 262144$ рублей карманных денег, выигрывая каждый день по рублю. Не проще ли было положить деньги в банк под самый минимальный процент?

Попытка добиться успеха в такой игре напоминает анекдот:

Посетитель официанту: *сколько стоит одна капля коньяка?*

Официант: *нисколько.*

Посетитель: *тогда накапайте мне стакан.* Здесь срабатывает

закон больших чисел. Ну а мы резюмируем, что в справедливой игре (а тем более в несправедливой) никакая стратегия не может привести к гарантированному выигрышу.

1.7 Теория принятия решений

Сегодня была достаточно математическая лекция, так как игры с природой — это в основном оценка математического ожидания выигрыша, основанная на вероятностях каждого исхода.

Каждое действие игрока в теории игр называют его стратегией. В тех играх, которые мы сегодня рассмотрели, стратегиями игрока на каждом ходе были «играть» и «не играть».

Попытка выбрать верную стратегию — это самый простой случай из теории принятия решений.

Известен парадокс под названием **Бурида́нов осёл** (лат. Asinus Buridani inter duo prata — буриданов осёл между двух лужаек), названный по имени Жана Буридана, несмотря на то, что был известен ещё из трудов Аристотеля: как осёл, которому предоставлены два одинаково соблазнительных угощения, может всё-таки рационально сделать выбор?

Буридан нигде не упоминал данной проблемы, но затрагивал подобную тему, отстаивая позицию морального детерминизма — что человек, столкнувшись с выбором, должен выбирать в сторону большего добра. Буридан допустил, что выбор может быть замедлен оценкой результатов каждого выбора.

Позже другие писатели утрировали эту точку зрения, приводя пример с ослом и двумя одинаково доступными и хорошими стогами сена и утверждая, что он непременно умрёт от голода, принимая решение. Эта версия стала широко известна благодаря Лейбницу.

В рамках логики самой задачи можно, однако, показать, что рационально мыслящий осёл никогда не умрёт с голоду, хотя и нельзя сказать, какую копну сена он выберет. Отказ от еды можно тоже считать выбором. Таким образом, из трёх вариантов выбора (копна слева, копна справа и голодная смерть) третий вариант будет хуже всех, то есть, будет доминирован другими стратегиями (об этом мы ещё поговорим), поэтому осёл его не выберет никогда.

В некоторых интерпретациях рассматривается и возможное изменение ситуационного контекста: соединение двух копн в одну, вследствие чего дихотомия исчезает.

Также можно упомянуть немного другую вещь, такую, как **Вилка Мортона**, описывающую ситуацию выбора между двумя одинаково неприятными альтернативами, или же ситуацию, в которой две ветви рассуждения ведут к одинаково неприятным выводам.

«Вилка» в шахматах – ситуация, когда одна фигура нападает сразу на две фигуры соперника, этим обычно славятся шахматные кони. Она тоже обычно не является приятной вещью, но там, как правило, срабатывает принцип «из двух зол выбираем меньшее», и мы отдаём менее ценную фигуру.

1.8 Взаимодействие в группе

Мы до этого играли только с природой, сыграем напоследок в игру друг с другом.

Каждый из вас должен написать на данном листике целое число от 1 до 100. Тот из вас, чьё число окажется ближе всего к $\frac{1}{10}$ суммы всех ваших чисел, получит от меня 100 баллов. Если такой человек будет не один — мы поделим этот приз на всех вас.

Идёт процесс игры и обсуждения результатов.

Логично, что так как нас больше 10, то, если каждый из вас напишет число 100, то все победят. Если мы все надеемся, что все рациональны и хотят победить, то мы понимаем, что каждый игрок пытается написать число, большее, чем среднее арифметическое от остальных чисел. Чтобы с гарантией наше число было не меньше, чем оно, нам как раз надо написать 100. Те, кто написал данное число, вы выбрали его только за красоту или рассуждали схожим образом?

2 Дилемма заключённого

Перейдём непосредственно к играм рациональных игроков.

2.1 Дилемма заключенного

Наверное, самая известная из модельных задач — так называемая «Дилемма заключённого». Её сформулировали ещё в 1950 году Мерилл Флад и Мелвин Дрешер, а название ей дал Альберт Такер.

Одна из её формулировок звучит следующим образом:

Дилемма заключённого. Окружной прокурор в городе Чикаго знает, что Соломон и Мухаммед — гангстеры, которые являются виновными в совершении тяжкого преступления, но не может уличить их в этом, если ни один из них не сознается. Он приказывает арестовать их и по отдельности (да они и так не смогли бы договориться) предлагает каждому следующий контракт:

Если Вы признаете вину, а ваш соучастник не захочет признаться, тогда вы идете домой и вообще свободны, ибо мы сможем забыть, что вы соучастник за ваше признание. Если вы не готовы признать вину, но ваш соучастник признает, то вы будете осуждены и приговорены к максимальному сроку в тюрьме. Если вы оба признаетесь, то вы оба будете осуждены, но не на максимальный срок. Если ни один не признается, то я ненадолго посажу обоих, а за что, уж будьте уверены — найду.

При данном условии, Соломон и Мухаммед играют в некую игру. Для каждого из них есть две стратегии: «Признать вину» и «Молчать».

Условимся записывать каждую возможную ситуацию, как пару выбранных стратегий, где на первом месте стоит выбор Соломона, а на втором — Мухаммеда. Например, пара («Признать вину», «Молчать») означает, что Соломон заложил Мухаммеда, который решил, что он добренький.

Так как сидеть в тюрьме, а, особенно, сидеть в тюрьме долго, никому не хочется, будем считать, что цель каждого игрока — минимизировать свой срок заключения. Срок будем записывать в виде чисел, обозначающих потерю очков.

Рассмотрим все возможные ситуации для того, чтобы составить так называемую **платёжную матрицу** данной игры. В каждой ячейке данной матрицы указана пара чисел, показывающая выигрыши игроков при выборе данной пары стратегий.

1. Допустим, Соломон выбирает молчит, а Мухаммед признаётся, тогда Соломона выставляют единственным виновным, и он получает максимальный срок в 10 лет. Мы записываем этот исход как -10 очков для Соломона по стратегии («Молчать», «Признать вину»), и 0 очков для Мухаммеда по данной стратегии.

2. Если Соломон признаётся, а Мухаммед молчит, то Соломона отпускают — записываем Соломону 0 очков по стратегии («Признать вину», «Молчать»), а Мухаммеду — -10 очков.

3. Если же оба решат скрыть все свои тайны, получаем стратегию («Молчать», «Молчать»). По правилам, в таком случае окружной прокурор фабрикует какое-нибудь мелкое дело, и оба идут в тюрьму на 1 год. Записываем -1 очко каждому при данной стратегии.

4. Наконец, если оба признают вину, то и Соломон и Мухаммед должны были бы сесть на 10 лет, но так как признание есть смягчающее обстоятельство, то оба в итоге получают по 9 лет. Запишем обоим -9 по стратегии («Признать вину», «Признать вину»).

		Мухаммед	
		«Молчать»	«Признать вину»
Соломон	«Молчать»	(-1,-1)	(-10,0)
	«Признать вину»	(0, -10)	(-9, -9)

Заметим, что у нас есть проблема: ни Мухаммед не знает, какую стратегию изберёт Соломон, ни Соломон не знает, какую стратегию изберёт Мухаммед. Иначе они бы только глянули на соответствующую стратегии другого игрока строку или столбец и выбрали бы лучший исход из предлагаемых им.

В данной игре, на самом деле, всё просто — какую бы стратегию не выбрал соперник, признание всегда ведёт к максимизации очков. Но в таком случае, оба игрока признаются и оба попадут на нары на 9 лет, хотя могли бы оба смолчать и получить всего по 1 году заключения.

Как же так? Почему рациональные действия двух человек привели к настолько нерациональному исходу? А вот это и является дилеммой...

Мы только что составили матрицу платежей. Сразу введём следующее определение.

Определение. Нормальная, или **стратегическая** форма игры описывается платёжной матрицей. Обе стороны матрицы — игроки. Стратегии первого игрока определяются строками, стратегии второго — столбцами, пересечение строк — выигрыши игроков.

На самом деле, критикам теории игр вообще не нравится дилемма заключенного, потому что они видят, что и Мухаммеду, и Соломону было бы лучше, если бы они оба молчали. Если бы вместо Мухаммеда поймали брата Соломона, Давида, скорее всего, они бы так и поступили, но, на самом деле, если люди не связаны до игры, поступки большинства из нас будут достаточно эгоистичными. Если вы посидите на ютубе, вы обнаружите, например, примеры телешоу, основанные на дилемме заключенного, например, шоу «Golden Balls».

Одна из многочисленных попыток решить парадокс рациональности в дилемме заключенных — это использовать симметрию игры, рассматривая Мухаммеда и Соломона как близнецов.

Это выглядит следующим образом:

Две рациональных человека, перед которыми стоит одна и та же проблема, придут к такому же выводу. Поэтому Мухаммед должен исходить из того, что Соломон сделает такой же выбор, как и он. Поэтому либо оба идут в тюрьму на девять лет, или они оба идут в тюрьму на один год. Поскольку последний вариант является предпочтительным, Мухаммед должен молчать. Так как Соломон его близнец, он будет рассуждать таким же образом и тоже будет молчать.

Но есть одна проблема: это, по сути, превращает данную игру в игру с одним игроком, то есть, дилемма перестаёт быть дилеммой как таковой. Дилемма как раз и заключается в **независимости** принимаемых игроками решений.

2.2 Дилемма заключённого в группе. Игра в конкурирующие фирмы.

Так как, из-за численности группы, мы не можем сыграть с вами в простую игру «Дилеммы заключённого», давайте сыграем в немного другую её версию.

Подобную игру проводил профессор Реймонд Батталио из Техаса.

Представим, что все вы — владельцы гипотетических компаний, и все вы должны решить, какой объём продукции будет выпускать ваша компания. Это решение нужно написать на листке бумаги, независимо от окружающих (лучше в тайне от них). Листочки надо подписать и кинуть в шляпу на моём столе.

Если вы хотите выпускать 1 единицу товара, то совокупное предложение сохранится на низком уровне, а, соответственно, цены — на высоком.

Если вы хотите выпускать 2 единицы товара, то вы получите дополнительный доход за счёт других, но цены уменьшатся.

Чтобы не углубляться совсем в экономику, пусть ваш выигрыш будет осуществляться по следующей схеме:

Число людей, выбравших 1	Выигрыш выбравшего 1	Выигрыш выбравшего 2
0	0	7
1	1	8
2	2	9
3	3	10
4	4	11
5	5	12
...	...	...
20	20	27
...	...	...

Таким образом, школьники, выбравшие «2», всегда наберут на 7 очков больше, чем школьники, выбравшие «1». Но с другой стороны, чем больше школьников выберут «2», тем меньше их совокупный выигрыш.

Не волнуйтесь, я не буду озвучивать, кто выбрал какую стратегию, вообще, в большинстве наших игр только вам самим и мне будут известны ваши баллы, я озвучу только общие результаты игры.

Идёт процесс игры и обсуждения результатов.

Теперь можно сыграть в ту же самую игру, но теперь вы предварительно можете обсудить свою стратегию друг с другом.

Идёт процесс игры и обсуждения результатов.

2.3 Дилемма заключённого в политике

В политике тоже можно использовать дилемму заключенного. Представим два государства, которые вовлечены в гонку вооружений. Эти государства имеют две стратегии: увеличить вооружения и расходы на них либо сокращать вооружения и расходы на них. При этом очевидным образом выполняются постулаты дилеммы заключённого ($D > C > d > c$):

- D — «мы вооружились, а противник — нет» — наилучший исход, наибольшая безопасность;
- C — «никто не вооружился» — следующий по предпочтительности исход;
- d — «оба вооружились» — плохо, но не катастрофично;
- c — «мы не вооружились, а противник вооружился» — катастрофический исход.

С точки зрения стороны А, если сторона Б не вооружается, то для А выбор идёт между D и C — лучше вооружаться. Если же Б вооружается, то для А выбор идёт между d и c — опять-таки выгоднее вооружаться. Тем самым при любом выборе Б для стороны А выгоднее вооружаться. Ситуация для стороны Б совершенно аналогична, и в итоге обе стороны будут стремиться к военной экспансии.

2.4 Частные и общественные блага

Для того, чтобы в некоторых задачах проще было математизировать принимаемые решения, озвучим два определения из экономики:

Частные блага — это то, что люди потребляют сами.

Общественные (коллективные) блага являются благами, которыми при их наличии может пользоваться любой — например, это дорожная сеть, лавочки на НК и так далее.

А теперь мы сформулируем очень простую модельную задачу, связанную с понятием общественного блага:

Пусть у нас есть очень маленькая страна с двумя гражданами, живущими в одном доме. Каждый человек либо может заплатить 3 рубля за установку отпугивателя комаров рядом с их домом, либо не платить. Если установлена хотя бы одна отпугивалка, то всё хорошо, если не установлена — граждан покусают злые малярийные комары, и им придётся потратить по 2 рубля на лечение.

Данную задачу, опять же, можно сформулировать на языке матриц платежей,

		Вася	
		не купить	купить
Петя	не купить	(2,2)	(0,3)
	купить	(3,0)	(3,3)

Опять же, видно, что каждый будет надеяться на другого, и придётся лечиться. А если бы они дружили, они могли бы просто скинуться по 1.5 рубля, и все оказались бы в выигрыше...

А что будет, если рассматривать задачу с гораздо большим количеством игроков?

Рассмотрим электрички и «зайцев», то есть, безбилетников.

Что произойдёт, если все пассажиры перестанут платить за билеты и станут «зайцами»?

— Абсолютно все? Невозможно!

— Ладно, большинство.

— И это невозможно. Во-первых, имеются контролеры и штрафы. Во-вторых, «сознательные люди» будут всегда.

— Ладно, пусть «зайцев» будет 20%. Это правдоподобно. Транспортники будут терять пятую часть своего дохода. Это приведёт к росту цен на поездки. Сознательные пассажиры станут оплачивать безбилетников.

Но это лишь одна сторона проблемы «зайца». Если людям действительно нужен маршрут, то при повышении оплаты за проезд они ездить не перестанут. Но вот другая ситуация. Представим сельскую местность и группу фермеров, производящих продукцию. Плохие дороги — дорогая доставка. Фермеры решили вложить средства в постройку дороги, которая удешевит доставку продукции, и которая быстро окупится. Это выгодно всем. Поэтому один фермер решил не вкладывать свои средства, ведь дорогу построят и без них. Как только его сосед узнал об этом, он тоже решил отказаться. В результате дорогу так и не построили.

Проблема безбилетника в теории коллективных благ не в том, что его поведение неэтично. Она в том, что наличие особей с такой стратегией может привести к тому, что коллективное действие не состоится. Наличие «зайцев», готовых воспользоваться общим ресурсом «на халяву» приводит к тому, что остальные участники группы совсем отказываются от совместного проекта.

2.5 Игра со взносами в общий фонд

Сыграем с вами ещё в одну игру.

Каждому из вас начисляется 10 новых очков.

Вы должны решить, какую часть именно этой суммы вы оставите себе, а какую отдадите в общий фонд.

После этого я удваиваю сумму общего фонда и делю её поровну между абсолютно всеми участниками игры, вне зависимости от того, сделали ли они взносы в фонд или оставили всю сумму себе.

Опять же, на бумажках с вашей фамилией вы должны написать сумму, которую вы внесли в общий фонд.

Идёт процесс игры и обсуждения результатов.

На самом деле здесь, как и во всех сегодняшних играх, забрать всю сумму себе — доминирующая стратегия.

Объясним это.

Пусть была группа из четырёх игроков. Независимо от действий других игроков, если первый игрок решит внести 2 очка в общий фонд, то после удваивания сумма в общем фонде увеличится на 4 очка. Но при этом 3 очка достанется другим, а ему только одно очко, значит, игрок потеряет ещё больше денег, если вложит больше, и выиграет, если размер его взноса сократится. Интересно, что такая стратегия локально выгодна для игрока, независимо от того, вкладывают ли другие игроки деньги в фонд.

Так как каждый участник рассчитывает на то, что он получит выгоду от того, что станет «зайцем», не внося средств в фонд, то эта стратегия становится доминирующей. Все игроки, согласно этой стратегии, денег в фонд не внесут и, следовательно, выигрыша не получат! Если в автобусе окажутся одни зайцы, водитель не поедет. А ведь им достаточно всем было внести по 10 очков и каждый получил бы выгоду.

2.6 Немного классификации

Мы с вами уже построили платёжные матрицы в двух играх, проведём немного классификации.

В 1944 году за авторством Моргенштерна и фон Неймана была опубликована книга «Теория игр и экономическое поведение», в которой:

- Сформулировано определение «игры», как деятельности двух и более участников (игроков) имеющей условия некоего «выигрыша» и «проигрыша», в рамках которой все участники могут распоряжаться какими-то ресурсами и взаимодействуют между собой, преследуя цель «выиграть» и принимая решения, основанные на поведении других игроков;

- Математически описан способ поиска оптимальных стратегий в такой игре (ведущих к «выигрышу» с какой-то определенной вероятностью).

Суммой игры называется общий итог выигрышей и проигрышей.

В **игре с нулевой суммой** выигрыш одной стороны равен проигрышу другой. Некоторые карточные игры — преферанс, покер, бридж — есть игры с нулевой суммой. Игры с отрицательной суммой тоже имеются — например, лотереи (если считать сумму участников и не учитывать организаторов).

Команда, выступающая как единое целое, тоже может считаться игроком. **Антагонистической игрой** называется игра двух игроков с нулевой суммой — выигрыш одного игрока оборачивается проигрышем другого.

Существуют игры с количеством участников, большим двух. Эти игры можно разделить на два класса — **кооперативные**, когда разрешено нескольким участникам вступать в коалицию (например, в преферансе при розыгрыше мизера обычно два игрока играют против одного в пределах одной партии). В **некооперативных** играх каждый участник играет только за себя.

В спортивных играх — командных (футбол, хоккей) или личных (шахматы) каждый матч или партия есть игра с нулевой суммой по результатам (ничья, или же один выигрывает, а другой проигрывает). Хотя в турнирных таблицах фигурируют общие набранные очки, в шахматах, например, считают именно «плюсы» — разницу между выигранными и проигранными партиями. В футболе, в связи с борьбой с ничьими, ничейный результат невыгоден обоим. Но если брать именно набранные очки, то турнир — игра с положительной суммой.

2.7 Равновесие по Нэшу

Нэш в теории игр был признан второй звездой после фон Неймана. Родился в 1928 г., изучал математику в Принстоне и скоро проявил интерес к теории игр. В своей диссертации (1950) двадцатидвухлетний Нэш сформулировал понятие, которому суждено было изменить теорию игр. Кстати, по мотивам его жизни был снят фильм «Игры разума», весьма советую к просмотру.

Термин «равновесие Нэша» настолько популярен, что сам Нэш стал бы миллионером, если бы ему платили по доллару за каждое упоминание о нём. Во всяком случае, профессором MIT он стал.

Вначале Нэш исследовал игру двух игроков с ненулевой суммой, затем объектом его исследований стали некооперативные игры с тремя и более участниками. Нэш вначале выдвинул понятие о равновесии в таких играх, затем доказал, что оно существует для любых конечных игр с любым числом игроков. До него фон Нейманом было доказано только равновесие в играх двух лиц с нулевой суммой.

Исследования Джона Нэша принесли ему Нобелевскую премию по экономике в 1994 году совместно с Джоном Харсаньи и Райнхардом Селтеном. Нобелевский комитет пояснил, что Харсаньи премирован за «распространение равновесия Нэша на класс игр с неполной информацией», а Селтен — за обогащение этого равновесия.

Мы видим, что равновесие Нэша привело троих учёных к Нобелевской премии (хотя это была математика, премию дали за экономику, математикам Нобелевские премии не положены). Так что же это такое, равновесие Нэша?

Равновесие Нэша — ситуация в игре, в которой ни один из игроков не может улучшить свое положение, односторонне изменив свою стратегию, если другие игроки свои стратегии не меняли.

Каждый из игроков в равновесии Нэша осведомлён о стратегиях других игроков и в связи с этим выбирает для себя лучшую из доступных ему стратегий. В равновесии Нэша действует принцип «оглашения» — если все игроки огласят свои стратегии, ни один из них не захочет изменить свою. Это приводит к выводу, что каждому из игроков невыгодно в одностороннем порядке менять свою стратегию — система находится равновесии. Для его поддержания не требуется внешних сил, каждый из игроков старается реализовать в создавшихся условиях именно свою стратегию, и равновесие нарушать невыгодно каждому из игроков. Именно здесь кроется различие между кооперативными и некооперативными играми — для устойчивости первых могут потребоваться внешние силы (например, суд), устойчивость вторых же внешних сил не требует.

К сожалению, встречаются такие ситуации, когда такое устойчивое состояние возникает в невыгодной для всех ситуации. Если бы все изменили свои стратегии, система пришла бы к более выгодному состоянию для всех, но для этого необходимо сотрудничество всех, которое невозможно в некооперативных играх, а попытка любого из игроков изменить для себя стратегию приводит к ещё более худшим результатам. Упомянутая ранее дилемма заключённого — один из случаев стабильно плохой по Нэшу ситуации для всех.

2.8 Парето-оптимальность

Из двух возможных видов игр мы до сих пор рассматривали только некооперативные, то есть те, в которых каждый игрок является эгоистом и желает максимизировать только свой собственный выигрыш или минимизировать свой проигрыш. Возникает вопрос: почему, например, в дилемме заключённого игроки не могут договориться между собой о том, какие стратегии применять? Критики игрового анализа дилеммы заключённых считают, что рациональное поведение, приводящее к более выгодным для всех ситуациям, возникает не для отдельных лиц, а для групп. Поэтому они считают, что для отдельно взятого игрока его оптимальная стратегия будет заключаться в достижении оптимальной цели для всей группы в целом. Теория рабочего класса Карла Маркса является проявлением такого мышления.

Пусть имеется система с несколькими частными показателями. Тогда система достигла **оптимальности по Парето**, если при улучшении любого из показателей достигается ухудшение других.

Сам Парето высказывался так:

> «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением»

Таким образом, система допускает локальные улучшения до тех пор, пока они не приносят никому вреда.

Суммарное благосостояние общества по Парето максимально в состоянии, когда любое изменение достигнутого оптимального распределения ухудшает благосостояние хотя бы одного субъекта системы.

Например, в дилемме заключённых состояние «оба молчат» является Парето-оптимальным.

Но опять же возникает проблема. Философы, которые считают, что этот факт показывает противоречие между некооперативной и кооперативной теорией игр упускают из виду важность предположения в кооперативной теории игр о том, что могут быть сделаны жесткие договоренности. Не имеет значения, что Соломон и Мухаммед обещали соблюдать соглашение. Они, например, могут договориться, но не сдержать обещания или они монут затратить ресурсы на обеспечивание нерушимости договора.

2.9 Штрафы за отклонение от стратегий

Введя штрафы за какие-то поступки, можно достаточно сильно поменять матрицу платежей.

Пусть Соломон и Мухаммед заключили предварительно такой договор: в случае, если кто-то один из них попытается заложить другого, друзья того, кого он заложил, поймают и посадят его в подвал на 3 года. Посмотрим, как изменится матрица платежей в данном случае.

		Мухаммед	
		«Молчать»	«Признать вину»
Соломон	«Молчать»	(-1,-1)	(-10,-3)
	«Признать вину»	(-3, -10)	(-9, -9)

Ну что же, очевидно, что теперь уже взаимное молчание является равновесием. Так что да, такой механизм вполне работает.

2.10 Игра со взносами в общий фонд с наказаниями

Вернёмся к игре со взносами в общий фонд.

Эту игру можно модифицировать, введя возможности штрафовать нарушивших договорённость, при этом возникающие издержки распределяются на всех участников. В данной версии, например, при второй итерации проходящей открыто игры каждый игрок может сократить выигрыш другого игрока, отдав за это мне треть той суммы, на которую вы хотите сократить его. На самом деле, обычно перспектива в будущем, возможно, быть наказанным коллективом, весьма благотворно влияет на взносы на первом этапе.

Так как у нас нет возможности сыграть в данную игру требуемое количество раз, давайте просто сыграем в открытую игру.

Правила игры те же, пишете вы так же вслепую, но после этого все ваши действия я зачитаю вслух и ваши товарищи будут знать, жадина вы или энтузиаст.

Идёт процесс игры и обсуждения результатов.

3 Игры с повторениями

Как вы уже поняли, главная цель данного курса — познакомить вас с наиболее классическими из задач теории игр, а так же понять их математику и психологию.

3.1 Охота на оленя

Рассмотрим игру «Охота на оленя».

Впервые описанная Жан-Жаком Руссо в 1755 году, данная кооперативная симметричная игра, описывающая конфликт между личными интересами и общественными интересами, звучит так:

> *Если охотились на оленя, то каждый понимал, что для этого он обязан оставаться на своем посту; но если вблизи кого-либо из охотников пробегал заяц, то не приходилось сомневаться, что этот охотник без зазрения совести пустится за ним вдогонку и, настигнув добычу, весьма мало будет сокрушаться о том, что таким образом лишил добычи своих товарищей.*
> *— Ж. Ж. Руссо. Рассуждение о происхождении и основаниях неравенства между людьми // Трактаты / Пер. с франц. А. Хаютина. — М.: Наука, 1969. — С. 75.*

Каждый охотник желает знать.... что он хочет выбрать — пойти застрелить зайца или застрелить оленя. Каждый игрок выбирает действие, не зная, как поступит второй. Если один выбирает оленя, то он должен стрелять вместе со вторым, чтобы достигнуть успеха. Если зайца человек может застрелить и в одиночку, то на оленя мощности одного выстрела уже не хватит.

Построим платежную матрицу для данной игры.

		Первый охотник	
		Олень	Заяц
Второй охотник	Олень	(5,5)	(0,4)
	Заяц	(4,0)	(2,2)

«Охота на оленя» — это игра, в которой есть два равновесия — одно доминирует по риску, другое по выигрышу. Пара «Олень, Олень» доминирует по выигрышу, так как выплаты больше для обоих игроков. С другой стороны, пара «Заяц, Заяц» доминирует по риску, так как если существует неопределенность в отношении действий другого игрока, побег за зайцем обеспечит более высокую ожидаемую отдачу. Чем больше неопределенность игроков о действиях другого игрока, тем больше вероятность, что они будут выбирать аналогичную стратегию.

Мы тут ввели новые понятия доминируемости, что они значат?

Равновесие **доминирует по выигрышу** в игре, если оно есть Парето-улучшение всех остальных равновесий. Доминирующее равновесие при некооперативной игре даёт каждому из игроков наибольший выигрыш и поэтому каждый игрок использует именно доминирующее по выигрышу равновесие.

Бассейн притяжения равновесия — зона при наличии неопределённости относительно стратегий других участников, в которой игрок выбирает стратегию, ведущую к данному равновесию.

Равновесие, имеющее наибольший бассейн притяжения, **доминирует по риску**.

3.2 Принцип минимакса

Перейдём к играм с нулевой суммой. В них на пересечениях стратегий в платёжной матрице записаны не пары чисел, а одно число — сумма, которую получает первый игрок от второго.

Определение. Седловая точка матрицы $(a_{ij})_{m\times n}$ — пара номеров строки i_0 и столбца j_0 такая, что для любых i и j выполняются неравенства

$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}$.

Элемент $a_{i_0j_0}$ в матрице с седловой точкой (i_0, j_0) и максимален в своем столбце, и минимален в своей строке. Можно показать, что седловая точка является точкой наибольшей целесообразности для обоих игроков. Почему? Пусть первый игрок выбрал i—ю стратегию. Тогда элементы строки i в матрице будут означать его возможные выигрыши. Если второй игрок применит оптимальную для него стратегию, то выигрыш первого игрока, очевидно, будет равен $\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ — минимальному элементу в i—й строке. Таким образом, первому игроку требуется выбрать такую строку, чтобы минимальный элемент в ней был наибольшим среди всех минимальных элементах в строках, то есть, ту строку, в которой $\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ максимально.

Число $\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ является **нижней ценой игры**, а стратегия первого игрока, приводящая к нему, называется **максиминной**. Максиминная стратегия позволяет первому игроку получить гарантированный выигрыш, не меньший α вне зависимости от действий второго игрока.

Второй игрок заинтересован в том, чтобы первый игрок выиграл как можно меньше. Если он выберет j-ю стратегию (это будет соответствовать j-му столбцу платёжной матрицы), то при выборе первым игроком стратегии i выигрыш первого составит a_{ij}. Первый игрок, очевидно, выберет строку с наибольшим значением в столбце j и, следовательно, второму игроку требуется выбрать такой столбец, в котором такое наибольшее значение минимально. Выигрыш второго игрока при его наилучшей стратегии будет равен $-\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}$.

Число $\beta = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ является **верхней ценой игры**, а стратегия второго игрока, приводящая к нему, называется **минимаксной**. Такая стратегия позволяет получить гарантированный выигрыш не меньший $-\beta$ вне зависимости от действий первого игрока.

Эти стратегии, минимаксная и максиминная, являются осторожными стратегиями (они носят обобщённое название «минимаксные» стратегии, а сам принцип называется **«принципом минимакса»**.

Если нижняя и верхняя цены игры совпадают, то игра называется **игрой с седловой точкой**, а это совпадающее значение носит название **цена игры**.

Давайте выполним небольшое **упражнение** — найдём верхнюю и нижнюю цену игры с заданной платежной матрицей.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

Решение. Давайте для каждой строки матрицы найдём наименьший элемент. Запишем справа от строки. Для каждого столбца найдём наибольший элемент. Запишем его под столбцом.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \mathbf{1} \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & \mathbf{-1} \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & \mathbf{3} \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \end{array}$$

Тогда нижняя цена данной игры $= \max(1, -1, 3, -1) = 3$; верхняя цена игры $= \min(3, 3, 5, 4, 5) = 3$.

Есть ли у данной матрицы седловые точки? Да, причем их две, других нет — это точки на пересечении третьей строки с первым и вторым столбцами. Значит, оптимальной стратегией первого игрока будет выбрать третью строку, а второму без разницы, выбирать первую или вторую. Хотя я бы на месте второго выбрала вторую, там в целом поменьше числа. То есть, в равноценных ситуациях можно выбирать ту, куда выгоднее сходить, если есть шанс, что оппонент не настолько рационален, как вы. =)

Существуют игры, в которых можно явным образом откинуть заведомо нецелесообразные стратегии. Например, подобное мы наблюдали в рассмотренных ранее задачах.

Введём более формальное определение:

Определение. Строка i доминирует строку j, если для всех $k = 1, ..., n$ верно, что $a_{i,k} \leqslant a_{j,k}$ и существует такая стратегия l, что

$a_{i,l} > a_{j,l}$.

Убирание всех доминируемых строк из матрицы не приведёт к изменению решения. Этот принцип полезен для уменьшения размера платёжной матрицы. Подобное определение и метод уменьшения размера матрицы существует и для столбцов.

3.3 Несколько задач

Найдите верхнюю и нижнюю цену игры, а также исключите доминируемые стратегии при их наличии в следующих играх в стратегической форме:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

У вас есть 10 минут. Решения сдадите.

За каждую из найденных цен игры и каждую исключённую стратегию вы получаете по 2 балла.

3.4 Безумные шляпники

Давайте сейчас рассмотрим пример, приведённый в книге Кена Бинмора.

Шляпники из страны чудес делают цилиндры из картона. Так как шляпники безумны, они считают свой труд бесплатным, и поэтому функция производства включает в себя только картон в качестве входных данных. Чем больше шляпники делают шляп, тем больше они торопятся и тратят всё больше и больше картона на каждую шляпу.

Точная производственная функция для количества шляп определяется уравнением:

$a = \sqrt{r}$.

Это значит, что из r листов картона шляпник может сделать $a = \sqrt{r}$ шляп. Например, для изготовления одной шляпы потребуется всего один лист картона, а вот для двух шляп — уже 4.

Алиса является монополистом в шляпном бизнесе. Картон можно приобрести на один доллар в лист, и поэтому один цилиндр обойдется в 1 доллар, а вот 2 — уже в 4. Таким образом, функция общей стоимости может быть выражена, как

$c(a) = a^2$.

Если Алиса продаёт шляпы по цене p долларов каждую, то её прибыль после продажи a шляп будет равна

$\pi = a \cdot p - a^2$.

Чтобы узнать, как получить как можно больше прибыли, Алисе нужно знать, сколько шляп a она сможет продать, если она будет продавать по цене p. Логично, что чем дешевле вещь, если она не является жизненно необходимой, тем больше её будут покупать. В стране чудес эта информация задается уравнением спроса:

$30 = a \cdot p$.

После подстановки получим, что $\pi = 30 - a^2$, а, значит, прибыль будет максимальной, если она продаст всего одну, но зато очень дорогую шляпу.

Классический монополист задаёт цену сам, он имеет полную власть над ней. Торговцы на совершенно конкурентном рынке продают товар по сумме, близкой к стоимости производства, то есть, издержкам — ибо цена уменьшается для оттягивания на себя доли рынка.

Какое отношение имеет к этому примеру теория игр? А вот сейчас мы это узнаем.

Предположим, что в страну чудес попал ещё один шляпный бизнесмен. Например, пусть это будет Крокодил Гена.

Пусть Алиса производит a шляп, а Крокодил Гена — b шляп. Тогда каждая шляпа будет продана за $p = 30/(a+b)$ долларов. Если и Алиса и Крокодил Гена будут пытаться максимизировать только свою прибыль, то что они получат?

Упростим задачу — пусть каждый из участников рынка думает только о выборе между одной или двумя шляпами для производства.

Составим матрицу платежей.

		Алиса	
		1 шляпа	2 шляпы
Гена	1 шляпа	(14,14)	(9,16)
	2 шляпы	(16,9)	(11,11)

В дуополии, Алиса и Крокодил Гена попытаются получить вместе побольше денег и, если оба сделают только по одному цилиндру, то есть, в общей сложности только два цилиндра, каждый из них получит прибыль в размере 14.

Тем не менее, обычно игроки пытаются максимизировать свою собственную индивидуальную прибыль. И вот тут-то и возникает дилемма заключенных. Тут всегда сильно доминирует изготовление двух шляп. В результате каждый получает всего 11 долларов.

3.5 Игры с повторениями

Если рациональное сотрудничество невозможно в дилемме заключенных, как же дуополисты в реальной жизни могут договориться? Причина заключается в том, что реальный мир более сложен, чем вымышленные миры. Реальные дуополисты не живут ровно одним решением, а принимают новые и новые решения день за днем. Дилемма заключенных не отражает суть такого продолжающегося экономического взаимодействия, но мы можем создать «игрушечную игру», предполагая, что Алиса и Крокодил Гена должны играть в данную игру дилеммы заключенных каждый день с сегодняшнего дня и до вечности. Их выигрыши в этой новой игре — это просто их средний ежедневный доход.

Когда мы будем изучать повторяющиеся игры серьезно, мы найдем, что Алиса и Гена имеют огромное, в общем виде счётное, количество стратегий, но сейчас мы будем просто смотреть на три: одна шляпа, две шляпы, и «я такой внезапный». Третья стратегия — это делать одну шляпу до тех пор, как ваш противник делает то же самое, но переключится на две шляпы на следующий день после того, как ваш противник первым попытался на вас навариться.

Если использовать только стратегии «1 шляпа» и «2 шляпы», дилемма повторяющихся заключенных будет такой же, как и однократная, но у нас также есть стратегия «я такой внезапный». Когда игрок «я такой внезапный» играет с любителем такой же или одношляпной стратегии, то они всегда делают по одной шляпе, и каждый день оба получают по 14 долларов. Всё становится сложнее, когда игрок «я такой внезапный» наталкивается на двухшляпного. В первый день он сделает одну шляпу, а во второй — две. Но далее каждый игрок будет делать по 2 шляпы каждый день. Тогда каждый получит средний выигрыш в 11, так как выигрыш в первый день не имеет значения при вычислении средних над бесконечным периодом.

			Алиса		
			1 шляпа	я такой внезапный	2 шляпы
Гена	1 шляпа		(14,14)	(14,14)	(9,16)
	я такой внезапный		(14,14)	(14,14)	(11,11)
	2 шляпы		(16,9)	(11,11)	(11,11)

Согласовав полученные значения, мы переходим к матрице выигрышей, указанной на таблице. Данная таблица — лишь малая часть общей платёжной матрицы повторяющейся дилеммы заключенных, потому что мы рассмотрели только три стратегии из счётного множества. В полной таблице мы сможем наблюдать бесконечное множество равновесий, так какое же необходимо выбрать? Или к какому сойдётся игра? На самом деле, ответ на данный вопрос получить так просто нельзя, поэтому обычно в задачах просят просто найти множество равновесий по Нэшу, или Парето-оптимум, или, опять же, ставят более явный вопрос.

3.6 Смешанные стратегии

Если матрица платежей содержит седловую точку, то существуют хорошие стратегии для обоих игроков. Для однократной игры партнёрам стоит использовать принцип минимакса вне зависимости от того, содержит ли матрица платежей седловую точку или не содержит. Этот же принцип целесообразно использовать и при многократной игре с седловой точкой.

Стратегия меняется, как только речь заходит о многократной игре без седловой точки. В этом случае постоянное повторение стратегии может привести к невыгодным результатам. Например, если мы будем играть в «камень-ножницы-бумагу» и ходить всё время только одинаково, то даже если соперник немного умственно неполноценен, успеха нам это не принесёт.

В повторяющихся играх каждая из стратегий однократной игры называется чистой стратегией.

Если у нас имеется несколько чистых стратегий, каждая из которых может применяться с некоторой вероятностью, причём хотя бы одна из чистых стратегий должна быть реализована в данной конкретной игре, то такой набор называется **смешанной стратегией**. Интерес к смешанным стратегиям объясняется просто — если соперник определит, какая из ваших стратегий будет применяться в очередной игре, он сможет использовать эти знания для улучшения своего результата (и ухудшения вашего). Поэтому «чем случайнее, тем вернее», именно непредсказуемо случайное чередование стратегий не позволит добиться сопернику выигрыша.

Логично, что чистые стратегии можно представить как частный случай смешанных только в том случае, когда частота одной из стратегий — 1, а остальных — 0.

В **оптимальных смешанных стратегиях** игрок, отклонившийся от своей оптимальной стратегии, изменяет средний выигрыш в невыгодную для него сторону.

Решение игры есть совокупность применения каждым из игроков своих оптимальных стратегий. **Цена игры** — результат, достигнутый при решении игры, то есть, средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) при применении оптимальных стратегий обоими игроками. Те стратегии, которые присутствуют в оптимальной стратегии игрока с ненулевыми частотами, называются **полезными** (другое название — **активными**).

В 1928 году фон Нейман доказал, что для каждой игры имеется не менее одного решения. Это решение может находится в том числе в области смешанных стратегий.

3.7 Повторяющаяся дилемма заключённых

В книге «Эволюция кооперации» (1984) Роберт Аксельрод исследовал поведение игроков в повторяющейся дилемме заключенного. Он предложил своим коллегам реализовать алгоритмы, реализующие данную игру и провёл турнир среди данных алгоритмов. В турнире приняло участие много программ, реализующих алгоритмы. Интересно, что по поведению программ можно было наделять их человеческими качествами. Например, оказалось, что «жадные» программы начинали терпеть поражение после нескольких игр, то есть, в долгосрочной перспективе они оказывались несостоятельными. «Альтруистические» программы, стремящие к кооперации приводили, опять таки, в долгосрочной перспективе, к положительным результатам для самой программы. Аксельрод показал, что возможен естественный отбор, приводящий к альтруистическому поведению при начальном эгоистическом поведении.

Среди представленных программ были как очень сложные, так и очень простые, как детерминистические (не зависящие от случайных чисел), так и недетерминистические (смешанные). Интересно, что наилучшей из детерминистических стратегий оказалась стратегия «око за око», которая состояла всего их четырёх строк на бейсике. Она всегда сотрудничала на первом шаге, а на следующих шагах она повторяла поведение соперника, то есть, «предавала», если предавал соперник, и «сотрудничала», если сотрудничал соперник. Если добавить к этой стратегии элемент случайности, например, чтобы в случае предательства программа иногда, с вероятностью 1-5%, прощала, то результат мог бы оказаться ещё лучше. Это помогало разрушить цикл взаимного предательства (интересно звучит).

Анализируя результаты турнира, Аксельрод выделил несколько условий, способствующих высоким результатам в игре.

1. Стратегия не должна предавать, пока её не предаст соперник. Почти все стратегии, оказавшиеся в верхней части турнирной таблицы, имели это свойство, назовём его **добротой**. Интересно то, что для получения наибольшей выгоды для себя, то есть, в чисто эгоистических побуждениях, стратегия не должна топить соперника первой.

2. Стратегия должна реагировать на попытку соперника предать её. Всепрощающая стратегия обречена на неуспех, так как всегда найдётся «подлая» стратегия, которая не преминет этим

воспользоваться. То есть, успешная стратегия должна быть **мстительной**.

3. Если оппонент перестал предавать, хорошая стратегия должна возобновить сотрудничество. Стратегия должна уметь **прощать**.

4. Зависть — желание набрать очков больше, чем соперник. Это — плохое свойство, хорошие стратегии **независтливы**.

Вывод из этого эксперимента звучит странно: для того, чтобы стратегии-эгоисты получали как можно больше выгоды для себя, они должны быть добрыми, независтливыми и прощающими. Неожиданно, не так ли?

3.8 Игра в монетки.

Рассмотрим такую игру:

Имеется два игрока. Игрок, угадавший, в какой руке монета у партнёра, забирает её. Если угадать не получилось, отдаём свою монетку.

Построим матрицу данной игры.

		Вопрошающий	
		правая	левая
Держащий	правая	(-1,1)	(1,-1)
	левая	(1,-1)	(-1,1)

Как мы видим, в данной игре ВООБЩЕ нет никаких равновесий — ни по Нэшу, ни Парето-оптимальных.

Как вы думаете, какое будет равновесие в смешанных стратегиях в данной игре?

Давайте проведём чемпионат по данной игре. Для того, чтобы играть было интереснее — в парах чередуем попытки.

Разобьёмся на пары. В каждой паре вначале проводим два тура, в которых вначале первый участник загадывает монетку, а затем они меняются ролями. Если в результате такого боя получается ничья, то проводится третий тур, в котором загадывает тот, кто выиграл во втором. Если количество участников нечётное, то участник, не получивший пары, играет со мной по тем же правилам, и если он проиграл, то выбывает из соревнования, выиграл — проходит в следующий круг. Так мы играем до тех пор, пока не останется 2 или 3 человека. В финале каждый встречается с каждым по 10 раз загадывая и 10 раз угадывая. Каждый выигрыш — очко в копилку.

Происходит игра, затем обсуждение результатов и стратегий.

4 Психология игры

Сегодня мы начнём с продолжения обсуждения игр с повторениями.

4.1 Что такое математическое ожидание?

Когда мы продумываем смешанные стратегии, мы используем понятие «средний выигрыш». Что такое этот средний выигрыш? Не будем же мы просто искать среднее арифметическое для каждой игры?

Напомним более точные определения. Что такое выигрыш в каждой игре? Мы не знаем, как сходит соперник, поэтому это величина неизвестная.

Определение. Случайная величина может принимать в результате эксперимента неизвестные заранее значения из заданного множества.

Введём определение среднего выигрыша на более формальном языке:

Определение. Математическое ожидание случайной величины есть сумма произведения вероятностей появления всех возможных значений на величину этих значений. На самом деле, понятие математического ожидания — достаточно базовая вещь, которая используется далеко не только в теории игр, но об этом попозже.

4.2 Решение матричной игры в смешаных стратегиях

До этого мы решали только фиксированные игры, а теперь, пожалуй, решим матричную игру в смешанных стратегиях в общем виде.

Будем решать игру 2×2, полагая, что доминируемых стратегий нет.

Пусть платёжная матрица игры имеет вид

a	b
c	d

Пусть первый игрок с вероятностью x выбирает первую стратегию (первую строку) и с вероятностью $1 - x$ — вторую.

В данной игре обе чистые стратегии второго игрока должны быть одинаково полезными, иначе игра была бы игрой с седловой точкой, и имелось бы решение в виде чистых стратегий.

Что такое одинаково «полезные» стратегии? Это стратегии, имеющее одно и то же математическое ожидание выигрыша.

Тогда равенство выигрышей можно записать как

$$a \cdot x + c \cdot (1 - x) = b \cdot x + d \cdot (1 - x),$$

откуда можно найти, что

$$x = \frac{d - c}{a - c - b + d}.$$

Аналогичным образом можно найти и смешанную стратегию для второго игрока.

Пусть второй игрок с вероятностью y выбирает первую стратегию (первую строку) и с вероятностью $1 - y$ — вторую.

Тогда

$$a \cdot y + b \cdot (1 - y) = c \cdot y + d \cdot (1 - y),$$

$$y = \frac{d - b}{a - c - b + d}.$$

То есть, теперь, в принципе, у нас есть готовые формулы, которые помогут нам решить любую игру после сведения её к игре 2×2.

Найдём решение в смешанных стратегиях при игре в монетку, в которую мы играли в конце прошлой лекции.

Этим решением для обоих игроков будет равновероятное использование обеих чистых стратегий.

4.3 «Камень-ножницы-бумага»

Попробуем найти равновесие в смешанных стратегиях для игры «камень-ножницы-бумага».

Построим платёжную матрицу для данной игры. Это игра с нулевой суммой, в которой «1» — это победа, «-1» — поражение, «0» — ничья.

		Второй игрок		
		Камень	Ножницы	Бумага
Первый игрок	Камень	0	1	-1
	Ножницы	-1	0	1
	Бумага	1	-1	0

Пусть первый игрок с вероятностью x выбирает камень, с вероятностью y — ножницы и с вероятностью $1 - x - y$ — бумагу.

Тогда математическое ожидание выигрыша второго игрока в случае выбора им камня будет равно

$$0 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot (1 - x - y),$$

в случае выбора ножниц —

$$1 \cdot x + 0 \cdot y + (-1) \cdot (1 - x - y),$$

и в случае выбора бумаги —

$$(-1) \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot (1 - x - y).$$

Тогда равенство выигрышей можно записать как

$$0 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot (1 - x - y) =$$

$$1 \cdot x + 0 \cdot y + (-1) \cdot (1 - x - y) =$$
$$(-1) \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot (1 - x - y).$$

Отсюда

$$-y + 1 - x - y = x - 1 + x + y = -x + y.$$

Решив систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получаем, что равновесный выигрыш 0 достигается при $y = x = \frac{1}{3}$.

Аналогично можно определить и оптимальную стратегию для второго игрока.

На самом деле, «игра в монетку» и игра в «камень-ножницы-бумагу» весьма специфичны. Лучшей стратегией, как мы уже поняли, является случайный равновероятный выбор одного из вариантов. Но тогда средним выигрышем будет 0!.. Как же тогда существуют чемпионы по данным играм? Это просто лотерея или что-то большее? Почему они так популярны? На самом деле, данные игры весьма психологичны, так как, что ни говори, всё равно оба игрока будут пытаться предсказать ход противника.

Вспомним «Похищенное письмо» Эдгара По. Процитируем небольшой отрывок, как нельзя точно отражающий суть данных игр.

> *Мне знаком восьмилетний мальчуган, чья способность верно угадывать в игре «чет и нечет» снискала ему всеобщее восхищение. Это очень простая игра: один из играющих зажимает в кулаке несколько камешков и спрашивает у другого, четное ли их количество он держит или нечетное. Если второй играющий угадает правильно, то он выигрывает камешек, если же неправильно, то проигрывает камешек. Мальчик, о котором я упомянул, обыграл всех своих школьных товарищей. Разумеется, он строил свои догадки на каких-то принципах, и эти последние заключались лишь в том, что он внимательно следил за своим противником и правильно оценивал степень его хитрости. Например, его*

заведомо глупый противник поднимает кулак и опрашивает: «Чет или нечет?» Наш школьник отвечает «нечет»> и проигрывает.. Однако в следующей попытке он выигрывает, потому что говорит себе: «Этот дурак взял в прошлый раз четное количество камешков и, конечно, думает, что отлично схитрит, если теперь возьмет нечетное количество. Поэтому я опять скажу — нечет!» Он говорит «нечет!» и выигрывает. С противником чуть поумнее он рассуждал бы так: «Этот мальчик заметил, что я сейчас сказал «нечет», и теперь он сначала захочет изменить четное число камешков на нечетное, но тут же спохватится, что это слишком просто, и оставит их количество прежним. Поэтому я скажу «чет!». ». Он говорит «чет!» и выигрывает.. Вот ход логических рассуждений маленького мальчика, которого его товарищи окрестили «счастливчиком». Но, в сущности говоря, что это такое? — Всего только, — ответил я, — уменье полностью отождествить свой интеллект с интеллектом противника. — Вот именно, — сказал Дюпен. — А когда я спросил у мальчика, каким способом он достигает столь полного отождествления, обеспечивающего ему постоянный успех, он ответил следующее: «Когда я хочу узнать, насколько умен, или глуп, или добр, или зол вот этот мальчик иди о чем он сейчас думает, я стараюсь придать своему лицу точно такое же выражение, которое вижу на его лице, а потом жду, чтобы узнать, какие мысли или чувства возникнут у меня в соответствии с этим выражением».

Потому мальчик из данного рассказа настолько успешен, что он всегда может продумать цепочку

«Он думает, что я думаю, что он думает, что....» *ровно* на один шаг дальше, чем соперник.

4.4 Решение игры в смешанных стратегиях

Попробуем найти решение игры в смешанных стратегиях для матрицы побольше.

1	2	4
3	2	3
2	3	1

Пусть первый игрок с вероятностью x выбирает первую стратегию, с вероятностью y — вторую, и с вероятностью $1 - x - y$ — третью.

Аналогично предыдущей игре, распишем равенство математических ожиданий выигрыша второго игрока.

$$1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot (1 - x - y) =$$
$$2 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot (1 - x - y) =$$
$$4 \cdot x + 3 \cdot y + 1 \cdot (1 - x - y).$$

Отсюда,

$$2 - x + y = 3 - x - y = 1 + 3x + 2y.$$

Тогда,

$$2 + y = 3 - y,$$
$$2 - 3y = 4x.$$

$$y = \frac{1}{2};$$
$$x = \frac{1}{8}.$$

То есть, стратегия первого игрока — использовать стратегии соответственно с вероятностями $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$.

Найдём стратегию второго игрока. Пусть второй игрок с вероятностью a выбирает первую стратегию, с вероятностью b — вторую и с вероятностью $1 - a - b$ — третью.

Распишем равенство математических ожиданий выигрыша первого игрока.

$$1 \cdot a + 2 \cdot b + 4 \cdot (1 - a - b) =$$
$$3 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot (1 - a - b) =$$
$$2 \cdot a + 3 \cdot b + 1 \cdot (1 - a - b).$$

Отсюда стратегия первого игрока — использовать стратегии соответственно с вероятностями $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}$.

Таким образом, теперь мы можем решить любую матричную игру.

Повторим методику.

- Вначале последовательно исключаем все доминируемые стратегии.
- Если остаётся один элемент, значит, мы нашли седловую точку матрицы и, таким образом, у нас есть решение в чистых стратегиях, причём единственное.
- Находим и выделяем двумя разными способами оптимальные ходы для стратегий обоих игроков в каждой строке и в каждом столбце, виртуально фиксируя ход соперника.
- Если на пересечении столбцов и строк существуют элементы, выделенные обоими способами — у нас есть равновесия Нэша в чистых стратегиях.
- Ищем решение в смешаных стратегиях.

Вы верно поняли — бывают игры, в которых есть как равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, так и решение в смешанных.

4.5 Игры с множеством равновесий

А теперь придумайте, пожалуйста, игру, имеющую равновесия Нэша и в чистых, и в смешанных стратегиях.

Первый придумавший получит от меня 30 баллов,

Второй — 20 баллов,

А третий — 10 баллов.

Идёт процесс придумывания игр.

Пример одной из таких игр —

(1,10)	(0,0)
(0,0)	(10,1)

4.6 Листик для самостоятельного решения

Найдите равновесия в следующих играх, заданных в стратегической форме.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 10 & 11 & 6 \\ 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 24 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4.7 Последовательные игры

До этого мы обсуждали только игры, в которых игроки совершают выбор одновременно. Но есть и другие варианты.

Мало того, такие варианты встречаются достаточно часто.

Рассмотрим следующую игру:

Пусть Чебурашка и Сэйлор Мун собрались на свидание. Для того, чтобы никто не обиделся, вначале Чебурашка выбирает одно из двух кафе, а потом Сэйлор Мун выбирает одно из двух блюд в нём (блюда в кафе одинаковы, но готовят их по-разному). Каждая пара исхода принесёт разные выигрыши, выигрышем в данной игре будет полученное удовольствие от поглощения пищи. Так как эти персонажи слишком различны, в своём выборе они руководствуются исключительно эгоистичными соображениями.

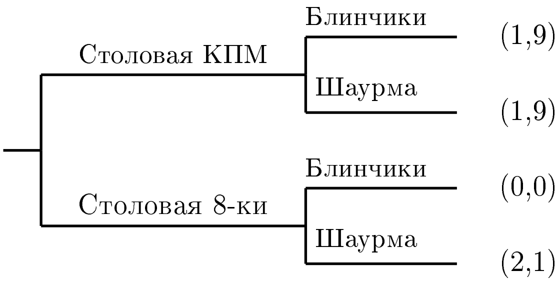
Попробуем описать данную игру в стратегической форме.

		Сэйлор Мун	
		Блинчики	Шаурма
Чебурашка	Столовая КПМ	(1,9)	(1,9)
	Столовая 8-ки	(0,0)	(2,1)

Заметим, что когда игра представлена в указанной форме, то мы видим два равновесия по Нэшу (Блинчики в Столовой КПМ или Шаурма в Столовой 8-ки). На самом деле это не так. Проблема заключается в том, что игроки выбирают стратегии последовательно друг за другом, второй игрок уже знает, какую стратегию выбрал первый. Матрица платежей в привычной форме не даёт об этом представления.

Асимметричность данной игры лучше проявляется не в виде матрицы платежей, а в виде дерева выбора, **экстенсивной форме**.

Первым делом Чебурашка должен выбрать столовую КПМ или столовую 8-ки, а затем Сэйлор Мун должна выбрать, что она возьмёт — блинчики или шаурму. Но Сэйлор Мун, делая свой выбор, уже знает, в какую столовую привёл её Чебурашка на свидание.



Проведём анализ игры, рассмотрев ходы в обратном порядке. Если Чебурашка уже сделал свой перый ход и выбрал «столовую КПМ», то, вне зависимости от хода Сэйлор Мун, выигрыш будет составлять (1,9). Если Чебурашка выбрал своим первым ходом «столовую 8-ки», то ходы Сэйлор Мун уже неравнозначны и для достижения наилучшего результата ей стоит выбрать шаурму, после чего выигрыш будет составлять (2,1).

Что же выбрать Чебурашке? При выборе «столовой КПМ» результатом игры будет (1,9) и он получит выигрыш, равный 1. Если он выберет «столовую 8-ки», то его выигрыш будет равен 2. Это и будет наиболее разумным для него выбором. Это значит, что равновесный выбор — шаурма из «столовой 8-ки», что ведёт к выигрышу для Чебурашки в 2, а для Сэйлор Мун — в 1.

Второе из вроде как равновесий, которое было получено с помощью таблицы, точно не является равновесием, имеющим смысл в данной игре. Очевидно, что в случае выбора Чебурашкой столовой КПМ, Сэйлор Мун могла выбрать блинчики, но выбор данной столовой Чебурашкой был бы не самым умным поступком.

С точки зрения Сэйлор Мун, свидание складывается не самым удачным образом — она могла бы получить выигрыш 9, а получит всего-навсего 1. Что она может сделать в такой ситуации?

Например, она может угрожать Чебурашке, что они всё равно будут есть блинчики, даже если пойдут в восьмёрку. Если Чебурашка верит в женские угрозы, то это имеет смысл, так как тогда столовая КПМ ему принесёт один балл удовольствия, тогда как блинчики в столовой 8-ки он вообще не захочет есть и получит 0 очков.

При внимательном рассмотрении становится ясным, что эта угроза на самом деле угрозой не является. Ведь очевидно, что как только Чебурашка сделает свой выбор, возможными выигрышами Сэйлор Мун могут быть либо 0, либо 1, так что пусть уж это будет 1.

Проблема Сэйлор Мун в том, что после того, как Чебурашка делает свой выбор, он ожидает рационального поступка от неё. Она могла бы себя связать обязательством съесть блинчики даже в том случае, если бы Чебурашка привёл её в «столовую 8-ки», возможно, это могло бы улучшить её настроение.

Связать себя таким обязательством можно, например, позволив кому-нибудь другому сделать за себя. Сэйлор Мун, например, могла бы нанять кузнеца и поручить ему заставить её есть блинчики в данном случае. Однако, с точки зрения Чебурашки, ситуация в этом случае решительно меняется — если он знает о договорённости Сэйлог Мун с кузнецом, то он понимает, что если он приведёт Сэйлор Мун не в КПМ, его вечер будет безнадёжно испорчен. Поэтому для него разумнее пойти на поводу у девушки. В данном случае женский ультиматум помог повысить настроение Сэйлор Мун.

Как вообще назвать равновесие, возникающее в данной игре?

Равновесие в этой и ей подобных играх называется **равновесием Штакельберга**. В таких играх имеется лидер, игрок, который делает первый ход. Лидер может определить стратегии, определяющееся равновесием Нэша, после каждого из своих ходов, а ведомый выбирает стратегии согласно прогноза лидера.

Например, в рассмотренной игре, равновесием Штакельберга является шаурма из столовой 8-ки.

4.8 Ограничение выбора

Стратегические ходы для игрока есть действия игрока, призванные обеспечить наиболее благоприятный для него результат.

Рассмотрим «игру в труса». Пусть имеются два автомобиля, несущихся друг к другу. Свернувший первым считается трусом, но вы-то трусом быть не хотите и пытаетесь найти стратегию, которая даст вам преимущество. Что вы можете сделать?

Чтобы показать, что вы не собираетесь сворачивать, вы можете демонстративно снять руль, и пусть ваш соперник это видит. Но ведь вы же потеряли свободу действий, разве потеря свободы может оказаться выгодной? В данной игре — да, может. Ведь свобода в этой игре есть возможность свернуть в сторону, то есть, проиграть. Сняв руль, вы лишаете себя такой возможности. Это — стратегический ход. Я надеюсь, вы не будете совершать таких стратегических ходов и, тем более, играть в такие игры.

Идея о том, что игроки (один или оба) могут попытаться воздействовать на ход игры, была развита Томасом Шеллингом. Он рассматривал такие приёмы, как обещание (обязательство) и угроза.

Обязательство — стратегический ход, извещающий других игроков о своих намерениях, которые не изменятся вне зависимости об обстоятельств. Например, вот игра в будильник. Имеются два игрока — «вечерний я» и «утренний я». Первый ход — «вечернего я». Он включает будильник и больше ничего не предпринимает. «Утренний я» совершает второй ход, он — ведомый. После срабатывания будильника у него две альтернативы — подняться с постели (оптимальная альтернатива на принятое «вечерним я» обязательство) или оставаться в ней.

Угроза — ответная реакция, штраф на не соответствующие вашим ожиданиям действия других игроков. Угроза, в отличии от обязательства, осуществляется ответным ходом. Если соперники планировали сделать что-либо выгодное для себя, но ваша реакция не позволяет это осуществить, то речь идёт о **сдерживании**. Если ваша угроза приводит к тому, что соперники выбирают ход, который иначе бы они не сделали, то речь идёт о **принуждении**. И в случае угрозы, и в случае обещания соперник в ответ совершает такие действия, которые иначе бы он не совершил, это — стратегические ходы.

Существуют и **информативные** ходы. Например, если мы заявляем, что что-либо произойдёт, то это называется **предупреждением**. Вариант — **заверение**, мы информируем, что в каких-то случаях мы будем придерживаться определённой стратегии.

В некоторых ситуациях первому игроку невыгодно принимать решения, в других случаях полезно помешать сопернику заявить об обязательстве. Великий китайский стратег Сунь Цзы учил, что врагу всегда надо оставлять путь к отступлению. Если пути к отступлению у соперника нет, у него появляется обязательство сражаться до конца, что может оказаться невыгодным для нас (например, мы оцениваем, что соперник в действительности сильнее нас, но он-то об этом не знает, заставить его сражаться — проиграть бой).

В основе сдерживания чаще всего лежит угроза, в основе принуждения — стимул.

Представим себе компанию и её сотрудников. Стратегия постепенного повышения вознаграждения за выполненную работы более эффективна, если имеется некоторая граница, до достижении которой вознаграждения не выплачиваются, а после достижения которой размер вознаграждений сильно возрастает.

Или другой пример. Вам часто приходится писать контрольные, а мне часто приходится их принимать. Наверное, все обратили внимание на то, что несмотря на то, что время уже истекло, ряд учеников всё ещё продолжает писать, надеясь выцарапать пару-тройку баллов. Стоит им дать ровно одну дополнительную минуту — они будут писать эту минуту и не остановятся. Угрозой в этом случае является отказ в приёме их работы на проверку при просрочке времени, но достоверность этой угрозы можно повысить, если ввести штраф за просрочку.

А какого размера должна быть угроза для того, чтобы изменить в вашу пользу стратегию партнёра? Здесь лучше начать с мелких угроз, так как это позволит свести свои затраты к минимуму, если ваши угрозы не позволяют сдержать или принудить соперника, а вам придётся вашу угрозу осуществить. Мы постепенно увеличиваем размер угрозы до оптимальных значений, это — стратегия балансирования на грани.

4.9 Аукцион

Сегодняшняя лекция была посвящена в основном психологии игры.

Давайте напоследок сыграем с вами в игру немного другого типа, чем мы проходили ранее.

У меня в руках листик, который даст вам 50 баллов.

Мы сыграем в некую разновидность аукциона: я отдам этот листик тому из вас, кто даст за него больше всего баллов. Правда, не всё так просто. Второй по порядку предложенной суммы человек отдаст мне ту сумму, которую он собирался отдать за мой листок.

Давайте поясним. В аукционе участвовало два человека, один из них предложил 16 баллов, он стал победителем, а ставка второго составила 15 баллов. Я отдаю победителю в обмен на его 16 баллов свои 50, а второй участник отдаст мне свои 15 баллов. Справедливо?

Идёт процесс игры и обсуждения результатов.

Эта игра называется «долларовый аукцион». Её описал Шубик в статье 1971 года и именно он считается её автором.

Профессор Макс Базермен каждый год таким образом продаёт 20-ти долларовую купюру студентам MBA Harward Buisness School. Рекорд продажи — 204 доллара, выигрыш всегда идёт на благотворительность. В эту же игру он играет и с топ-менеджерами крупных компаний и всегда выручает за свою 20-ти долларовую бумажку больше, чем она стоит. Что заставляет людей платить за бумажку в 20 долларов бо́льшие суммы? Профессор хочет показать, что, особенно в бизнесе, у человека имеется слабое место — боязнь потерь. При перспективе потерять деньги многие начинают вести себя неадекватно.

В начале игры участникам кажется, что халява близка — ну не буду же я отдавать за 20-ку бóльшую сумму! Но вот торги доходят до 15. Планируемый выигрыш уже не так сладок для первого, а второму грозит значительный проигрыш. Как только ставки превышают 21, в проигрыше оказываются оба. Но первый ведь проиграет всего 1 доллар, а второй — двадцать. Двадцать проигрывать не хочется, давайте я поставлю 22 доллара, тогда я проиграю всего 2. Теперь такие же рассуждения повторяет другой игрок, оказавшийся сейчас вторым. В итоге каждая ставка приводит к всё большему совокупному проигрышу, хотя каждый из участников простонапросто старался минимизировать *свой* проигрыш.

Давайте назовём это явление **феноменом Базермана** и посмотрим, где мы его могли видеть.

Игрок на фондовом рынке потерял деньги. Он может зафиксировать убыток, он верит, что удача ему улыбнётся — и теряет ещё. Игрок в казино (а мы знаем, что математическое ожидание выигрыша в казино отрицательно, то есть, это игра убыточна для каждого из игроков), надеясь отыграться, проигрывает всё.

Для некоторых магазинов, продающих электронику, в своё время наблюдался парадокс Базермана. Магазин закупил, скажем, цифровой фотоаппарат за 20000 рублей. Он выставляет за него цену в 30000 рублей. Цена кажется завышенной, но наших бизнесменов это не останавливает, они надеются продать его и получить прибыль. Но фотоаппарат никто не покупает, он лежит на полке. На рынок выходит новый, лучший фотоаппарат, обладающий более высокими характеристиками по закупочной цене 18000 рублей. Здесь самое время снизить цену на первый — за 30000 рублей он и раньше не был нужен, а теперь уж и подавно. Но менеджеры магазина рассуждают по-другому: у нас заложена цена 30000 как сумма закупочной цены 20000 и накладных расходов в 10000 на транспорт, зарплату и аренду. Если я продам этот фотоаппарат хотя бы за 29000, я получу чистый убыток в 1000 рублей, так что пусть он лежит по этой цене... Вероятность покупки такого фотоаппарата, правда, быстро устремляется к нулю и чистый убыток становится 30000 рублей.

Ещё один характерный пример — владельцы старых машин. В ремонт этих машин вкладываются деньги. Чем больше денег вложено в ремонт, тем меньше желания с этой машиной расстаться. «Я вложу ещё немного денег, и она, наконец, поедет». Есть у меня такие знакомые, это так.

Боязнь потерять деньги часто ведёт к ещё бóльшим потерям. Фиксируйте убытки, не умножая их. Если человек со степенью MBA предложит вам увеличить ваш доход, не доверяйте ему ваши деньги.

5 Последовательные игры. Игры с несовершенной или неполной информацией.

5.1 Выигрышные и проигрышные позиции

Расскажем ещё немного об играх. Если убрать фактор нерациональности, последовательные игры — это одна из возможных тем на олимпиадах по математике.

Пусть имеется игра для двух игроков, совершающих ходы поочереди. Что есть суть игры — сейчас не столь важно: числа, фигуры на доске, камушки в кучке. Важен факт, что после каждого совершённого хода позиция изменяется, и очередь хода переходит к другому игроку.

Пусть данная игра будет конечной, и в ней не будет ничьих. Тогда все возможные позиции, возникающие в этой игре, можно разделить на два множества: **выигрышных** и **проигрышных** позиций. Наложим следующие ограничения:

1. Каждая достижимая из начальной позиция принадлежит ровно одному из множеств.

2. Все заключительные (терминальные) позиции — выигрышные.

3. Любой ход из выигрышной позиции ведёт в проигрышную, то есть, в выигрышной позиции не существует ходов, приводящих к выигрышной позиции.

4. В любой проигрышной позиции существует по меньшей мере один ход, приводящий в выигрышную позицию.

Если начальная позиция была выигрышной, то у второго игрока есть выигрышная стратегия: первый игрок своим ходом может попасть только в проигрышную позицию, в то время, для второго (а мы за него играем) всегда найдётся ход в выигрышную. Аналогично, если начальная позиция была проигрышной, то выигрывает первый игрок, как бы парадоксально это ни звучало.

Найти выигрышные и проигрышные позиции помогает анализ с конца: используя то, что конечная позиция выигрышная, мы рассматриваем ходы в обратном направлении. Рассмотрим задачу:

Задача 1. Король стоит на поле $a1$. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, на одно поле вверх или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит короля на поле $h8$. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Попробуем найти выигрышные позиции, исходя из их свойств. По определению завершающая позиция ($h8$) — выигрышная. Поэтому в клетку $h8$ поставим «+». Также мы будем отмечать все найденные проигрышные позиции. В клетках, соответствующих проигрышным позициям, будем ставить «-». Так как позиции, из которых король может за один ход попасть на выигрышное поле $h8$ — проигрышные, то на поля $h7, g8, g7$ ставим «-». С полей $h6$ и $f8$ за один ход можно попасть только на выигрышные поля, значит, в этих клетках можно поставить «+» — они выигрышные. Из только что полученных выигрышных позиций получаются следующие проигрышные позиции: $h5, g5, g6, f7, e7, e8$. Продолжая аналогичным образом, мы в итоге заполним таблицу.

8	−	+	−	+	−	+	−	+
7	−	−	−	−	−	−	−	−
6	−	+	−	+	−	+	−	+
5	−	−	−	−	−	−	−	−
4	−	+	−	+	−	+	−	+
3	−	−	−	−	−	−	−	−
2	−	+	−	+	−	+	−	+
1	−	−	−	−	−	−	−	−
	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***

Выигрышные и проигрышные позиции для задачи про короля.

Начальная позиция является проигрышной, значит, выигрышная стратегия есть у первого игрока.

Решим ещё одну задачку из олимпиад.

Задача 2. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 7. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. В данном случае позиция — это одно число. Снова воспользуемся анализом с конца: все числа $\geqslant 1001$ являются выигрышными позициями. Те позиции, из которых можно попасть в выигрышные, должны быть проигрышными. Значит, все числа от 143 до 1000 являются проигрышными — домножив каждое на 7, мы попадём в выигрышную позицию. Все числа от 72 до 142 являются выигрышными позициями, потому что из них можно попасть только в проигрышные: при домножении числа от 72 до 142 на число от 2 до 7 получается число от 144 до 994. Продолжая аналогичным образом, получаем: позиции от 11 до 71 — проигрышные, позиции с 6 по 10 — выигрышные, и позиции с 1 по 5 — проигрышные.

Получается, что начальная позиция — проигрышная, значит, при правильной игре выигрывает первый игрок.

5.2 Равновесие по подыграм

Поиск равновесия в экономических играх производится точно так же, как и в математических. Развёрнутая форма игры представляет из себя однонаправленный граф без циклов, то есть, дерево. Мы помним, что заключительные позиции игры называются терминальными, а начальный узел - корневым. **Поддерево** — часть дерева, начинающаяся в нетерминальной вершине, **подыгра** — часть игры, описывающаяся поддеревом.

Мы часто применяли термин **стратегия**, описывающий действия игрока в конкретной ситуации, в данном случае — в тех позициях, в которых его очередь хода.

Решение математических игр мы находили с конца, этот метод называется **методом обратной индукции**. Мы рассматривали все терминальные вершины, дав им оценку (такие позиции называются позициями нулевого ранга), затем — все нетерминальные вершины, из которых все ходы ведут в терминальные вершины (этим получили все позиции, имеющие первый ранг), затем все позиции, из которых позиции первого ранга достижимы за один ход. Так как игра у нас конечная, то есть, содержит конечное количество вершин, то каждая возможная в игре позиция (достижимая из корневой) в конце концов получает свой ранг.

В экономических играх выигрыш и проигрыш не столь явны, пусть они определяются числами. Каждый из игроков стремится получить наибольший выигрыш для себя. В данном случае алгоритм немного усложняется. Ранг позиций теперь определяется выигрышем, который получат игроки. Рассмотрим позиции первого ранга. Игрок, делающий ход в этой позиции, выберет из них ту позицию, в которой он получит наибольший выигрыш. Каждая из позиций первого ранга получает ещё одну характеристику — выигрыш игрока, совершающего ход. Если игрок, совершающий заключительный ход, имеет выбор из нескольких ходов, приводящих к различным результатам, что он выберет? Очевидно, ход, приносящий ему наибольшую выгоду. Таким образом, каждая из позиций первого ранга получит число — значение выигрыша, например, первого игрока. Позиции второго ранга — те позиции, из которых имеются ходы в позиции первого ранга. Так как очередь хода сейчас принадлежит уже другому игроку, цель его меняется, ему требуется не максимизировать выигрыш противника, а минимизировать его (в игре с нулевой суммой это так). Этот алгоритм и называется методом обратной индукции. Изобрели его два математика - Церме́ло (он знаменит своей теоремой) и Кун, поэтому он и носит их имя.

Для игр в развёрнутой форме, то есть, представленных в виде дерева, равновесие Нэша тоже может существовать, оно будет называться **равновесием, совершённым по играм**. Это — набор стратегий обоих игроков, если его сужение на любую из подыгр приводит к равновесию Нэша в этой подыгре. Можно сказать, что стратегия в подыгре не будет зависеть от того, играется ли эта подыгра отдельно или она является частью большой игры.

5.3 Игры с несовершенной информацией

В шахматах и домино соперники, делая ходы, знают всю историю сделанных ходов (в шахматах их даже обычно записывают). Говоря более научным языком — игрок может определить вершину дерева игры для текущей позиции. Нарушение это принципа переводит игру в другой класс — класс игр с несовершенной информацией. Игрок, совершающий ход, может определить некое подмножество позиций дерева игры, в которых он может находиться, причём игрок может даже не знать, в какой подыгре он находится. Поэтому термин «подыгра» в таких играх меняет значение: теперь это такое поддерево игры, что любое информационное множество, пересекающееся с этим поддеревом, полностью лежит в нем.

В целом, все игры в нормальной форме могут быть представлены, как последовательная игра с несовершенной информацией.

5.4 Нужно больше золота!

Сыграем в последовательную игру.

Имеется завод, управляемый директором, у которого в подчинении начальники цехов. Директор принимает решение, устанавливать ли жёсткую политику, при которой рабочие облагаются штрафами, или мягкую. Начальники цехов тоже принимают решение, передавать ли все полученные штрафы директору, или добавить собственные, цеховые штрафы. Рабочие тоже выбирают — если зарплата минус небольшие штрафы их устраивает, то большие штрафы могут привести к забастовке. Забастовки снижают общую прибыль директора, и он старается их избежать.

Платежи директору:

- Директору выгодны высокие штрафы, к которым начальники цехов не добавляют свои, а рабочие не бастуют.
- Забастовка рабочих уменьшает платежи директору на 1.
- Если начальники цехов вводят свои штрафы, помимо директорских, платёж директору уменьшается на 1.
- Если директор не устанавливает высокие штрафы, платёж уменьшается на 1.

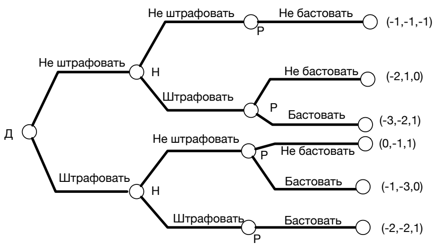
Платежи начальника цеха:

- Начальнику цеха выгодно, когда он собирает дополнительные штрафы, а рабочие не бастуют.
- Ситуация, когда рабочие бастуют и начальник собирает добавочные штрафы, хуже, чем если бы рабочие не бастовали и штрафы не собирались.
- Самый плохой случай, когда дополнительные штрафы не собираются, а рабочие бастуют.

Платежи рабочих

- Рабочие получают наибольшую выгоду, когда ни директор, ни начальник цеха штрафов не накладывает, а они не бастуют.
- Если начальник цеха ввёл штрафы помимо директорских, то независимо от величины директорских штрафов рабочие могут начать бастовать.

- Если и директор, и начальник цеха вводят большие штрафы, то рабочим ничего не остаётся, как бастовать.



Развёрнутая форма игры

Рабочие особенно не думают о причине, если замечают, что их стали штрафовать сильнее — то ли директор установил новые правила по всему заводу, то ли начальник цеха хочет подзаработать на рабочих. Раз так, то наша игра — игра с несовершенной информацией. Рабочие принимают решение о забастовке не зная, в какой вершине находится игра и каким путём они пришли к этой вершине.

У директора в нашей игре две стратегии — устанавливать штрафы или не устанавливать. У начальника цеха — четыре, так как перед принятием решения о штрафах в свою пользу он знает о решении директора. А вот у рабочих с учётом неразличимости предыстории ходов всего две стратегии.

Для того, чтобы найти все равновесия Нэша, составим матрицу платежей.

Стратегии начальника цеха будут различаться по регистру букв — большие буквы (в высоком регистре) будут применяться для случая, когда директор установил штраф, всего будет 4 буквы. Буквами E и e обозначим случаи, когда начальник цеха решил взимать дополнительные штрафы (от слова Extra), буквами B и b — когда он дополнительные штрафы взимать не хочет (от слова $Bypass$).

Если директор установил штрафы (F — $Fine$), то получается следующая матрица платежей:

		Рабочие	
		Бастовать	Не бастовать
Начальник цеха	E	(-2;-2;1)	(-2;-2;1)
	e	(-2;-2;1)	(-2;-2;1)
	B	(-1;-3;0)	(1;-1;1)
	b	(-1;-3;0)	(1;-1;1)

Если директор решил обойтись без штрафов (f):

		Рабочие	
		Бастовать	Не бастовать
Начальник цеха	E	(-3;-2;1)	(-2;1;0)
	e	(-1;-1;2)	(-1;-1;2)
	B	(-3;-2;1)	(-2;1;0)
	b	(-1;-1;2)	(-1;-1;2)

Найдём лучшие ответы начальника цеха на все стратегии директора и рабочих. Отметим в матрицах наилучший ход директора на каждую стратегию рабочих.

Для рабочих поступим аналогично — отметим наилучшие ходы рабочих на каждую из стратегий начальника цеха.

Для директора требуется сравнить выигрыш в обоих матрицах в ответ на каждую из стратегий начальника цеха.

Обозначим забастовку буквой S, от слова $Strike$. Мы можем видеть, что следующие наборы стратегий являются равновесиями Нэша (почему?): (F,E,S), (F, B, s), (F, b, s), (f, e, S), (f, b, S).

Какие из этих равновесий есть равновесия Нэша на подыграх? Имеются ли подыгры, не начинающиеся с начальных позиций? Если мы начинаем подыгру в позициях, где ход принадлежит рабочим, то информационное множество будет состоять из двух вершин, одна из которых лежит в поддереве, а одна — лежит за его пределами. Рассмотрим вершины, с которых начинаются поддеревья ходов начальника цеха. Увы, опять нам мешает тот факт, что информационное множество рабочих состоит из двух вершин, одна из которых лежит в нашем поддереве, а другая — лежит в другом поддереве, то есть, связана с другой подыгрой. Таким образом, подыгр, отличных от целой игры, у нас нет, и найденные равновесия Нэша являются равновесиями Нэша, совершёнными на подыграх.

5.5 Игры с неполной информацией

В статических играх, которые мы рассматривали до сих пор, мы считали, что игроки равноинформарованы о всех возможных ходах в игре и о её правилах. Более того, полагалось, что нам известны и целевые функции всех игроков, в том числе и всем известна наша целевая функция. Это были игры с полной информацией.

На самом деле, существует большое количество игр, таким условиям не удовлетворяющих, тех игр, в которых мы не знаем точно целевые функции других игроков. Если полагать, что существует ограниченное количество возможных целевых функций, мы даём возможность совершить ход природе, создав вместо настоящего игрока набор виртуальных, каждый с детерминированной функцией игры, и добавив ход игрока «природа», который выбирает фактического игрока из предложенного множества виртуальных. Если в нашей игре множество игроков, то первый ход всегда за игроком «природа», который выберет типы игроков в конкретной игре. Игры с неполной информацией называются **Байесовскими**.

Что такое рациональная стратегия в Байесовских играх? Как её определить? Каждый игрок знает свой тип, но тип соперника разыгрывается. Вопрос обычно состоит в том, какие вероятности у событий розыгрыша природой каждого из типов соперника. Фиксируя соперника (тем самым определяя его стратегию), мы можем установить ожидаемый выигрыш для каждого из возможных вариантов выбора. Математическое же ожидание общего выигрыша будет определяться суммой произведений нашего выигрыша в конкретном распределении типов игроков на вероятность появления в результате розыгрыша данного распределения типов. Напомним, что условные вероятности рассчитываются по формуле Байеса, отсюда термин «байесовское равновесие».

Возникающие задачи с учётом байесовского равновесия выходят за рамки школьной программы, поэтому мы не будем рассматривать решения в смешаных стратегиях и вообще достаточно строго, просто попытаемся провести некий анализ возникающих ситуаций.

5.6 Лыжню!

Поясним понятие байесовской игры следующей игрой, назовём её «байесовская лыжня».

Пусть имеется единственная лыжня, по которой идут двое лыжников навстречу друг другу. Лыжня одна, кто-то из них должен её уступить. Если никто не уступит, они столкнутся, а скорости у них большие. С другой стороны, уступить лыжню — показать себя малодушным, тоже не хочется. Давайте назовём «принципиальным лыжником» такого, который получит бо́льший штраф, если он уступит лыжню, а «добродушным» такого, который, уступив лыжню, не будет считать себя морально обделённым, то есть, штрафа не получит. Первый лыжник не знает, какой характер у второго, он оценивает вероятности того, что второй лыжник равновероятно принципиален или равнодушен, то есть, вероятности этих событий равны 0.5. Построим платёжную матрицу в предположении, что второй лыжник принципиален.

		Второй лыжник	
		Уступать	Не уступать
Первый лыжник	Уступать	(0;-4)	(-1;1)
	Не уступать	(1;-5)	(-4;-4)

Платёжная матрица в предположении добродушности второго лыжника такова:

		Второй лыжник	
		Уступать	Не уступать
Первый лыжник	Уступать	(0;0)	(-1;1)
	Не уступать	(1;-1)	(-4;-4)

Второй лыжник заранее знает, что первый лыжник добродушен. Ну разве это не понятно по его улыбке?

Решение. Так как первый лыжник ничего не знает о втором и маска на его лице не даёт понять, о чём тот думает, то получается, что только второй лыжник знает своё истинное состояние, а для первого он ни добр, ни зол, то есть, какой-то «лыжник Шрёдингера».

Определим средние выигрыши каждого из игроков при каждом исходе. Вернувшись к понятию математического ожидания, понимаем, что логично в качестве средних выигрышей использовать именно их математическое ожидание.

Тогда игра превратится в тот вид, в котором мы уже умеем находить равновесия.

Выигрыши первого игрока не зависят от состояния второго, то есть, стратегия первого игрока будет основываться только на его предположениях о состоянии и стратегии второго игрока.

Найдём равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях для обоих случаев.

Первая из игр, игра с принципиальным лыжником — игра с седловой точкой. Принципиальный лыжник выберет стратегию «не уступать» с вероятностью 1.

Рассмотрим вторую игру. Пусть с вероятностью p второй игрок будет уступать дорогу, тогда с вероятностью $1 - p$ он дорогу не уступит.

Выпишем условие равновесия:

$$0 \cdot p + (-1) \cdot (1 = p) = 1 \cdot p + (-4) \cdot (1 - p).$$

Отсюда, $p = 0.75$.

Итого, учитывая, что вероятность того, что второй лыжник добродушный, равна 0.5, математическое ожидание того, что второй лыжник уступит дорогу, равно

$$0.75 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = \frac{3}{8}.$$

Тогда математическое ожидание выигрыша первого игрока, если он уступит дорогу, равно

$$0 \cdot \frac{3}{8} + (-1) \cdot \frac{5}{8} = -\frac{5}{8}$$

.

Если же он не уступит дорогу, математическое ожидание будет

$$1 \cdot \frac{3}{8} + (-4) \cdot \frac{5}{8} = -\frac{17}{8}$$

.

Логично, что при таких математических ожиданиях первый игрок решит, что ему совсем не хочется рисковать, и уступит дорогу. Тогда второй, понимая, что подумает первый, таки промчится с ветерком мимо стоящего на обочине первого лыжника. С другой стороны, первый, зная про то, что думает про него второй, с ещё большей вероятностью уступит лыжню.

5.7 Рынок лимонов

В 1970 году была опубликована статья Джорджа Акерлофа «Рынок лимонов», в которой было показано, что несмотря на в общем стабилизирующую роль рыночных отношений, существуют ситуации, при которых отсутствие информации у одних участников и наличие информации у других может привести к краху и тех, и других.

Один из рассмотренных примеров — рынок подержанных автомобилей. Разделим все автомобили на две категории — «лимоны», автомобили, годные скорее на запчасти, и «персики», автомобили, на которых ещё можно ездить. «Лимоны» их владельцы готовы продать за 1000 долларов, а покупатели готовы заплатить за них 1500 долларов. Вполне обычная ситуация. Если запустить на рынок и тех, и других, автомобили найдут своих покупателей.

«Персики», разумеется, дороже. Их владельцы будут довольны, если они продадут их за 3000 долларов, а покупатели готовы платить за них 4000 долларов. Замечательная ситуация. Покупатели готовы дать предложенную продавцами цену и заплатят с удовольствием. Однако... Ох уж это «однако». Продавцы автомобилей знают, к какой категории относятся продаваемые им машины, а вот покупатели — нет. Все машины внешне в приличном состоянии, все ездят (правда, «лимоны» будут ездить недолго ...). Покупатели знают, что половина предлагаемых автомобилей — «лимоны», а половина — «персики», но не знают это про конкретно взятый автомобиль.

По байесовской модели справедливая цена, которую покупатель был бы готов заплатить за автомобиль при условии равной вероятности обоих типов автомобилей на рынке равна $\frac{1}{2} \cdot 1500 + \frac{1}{2} \cdot 4500 = 2750$.

Готов ли продать владелец «персика» свой автомобиль за такую цену? Очевидно, нет. На рынке останутся только «лимоны». Информация об этом быстро дойдёт до покупателей и максимум, что они будут предлагать за автомобиль — 1500 долларов. Рынок «персиков», который бы процветал в условиях полной информации, уничтожен, хотя продавцы готовы их продавать, а покупатели готовы их покупать, но увы...

Акерлоф этим и другими примерами показывает, что не нужно впадать в эйфорию по-поводу того, что рыночные отношения — самые подходящие для ведения экономической деятельности.

5.8 Выходные!

Ну и напоследок, как у нас уже заведено, сыграем в игру.

В этот раз вы можете общаться между собой.

Игра будет с неполной информацией, я буду играть роль природы, а, точнее, эту роль будет играть монетка, которую я брошу после того, как вы все договоритесь. Естественно, вы можете договориться о чем-то, но не сдержать обещания — мы соберем у вас записки с вашим итоговым решением.

Предположим, что вы уже поступили на физтех. Наступили первые выходные сентября и вы решаете, как вы хотите их провести.

У каждого из вас есть три следующие стратегии:

- **Шашлык**. Пойти в рощу устраивать шашлыки. Выигрыш при данной стратегии равен количеству пришедших на шашлык в случае хорошей погоды (чем больше народу, тем веселее) и -10 в случае дождя (так как вы все промокнете, и ваше настроение ухудшится).

- **Кофейня**. Пойти на вечеринку в кофейню. Обозначим за N - количество человек на лекции.

  Выигрыш при данной стратегии равен:

  – пришло меньше N/10 человек: -5 , если вы пришли на вечеринку при плохой погоде, вам просто скучно. При хорошей погоде вы получите -20, так как вы не пошли в рощу и даже не поели шашлыка.

  – пришло от N/10 до N/5 человек: при плохой погоде +10 — вам уже веселее, но всё ещё не очень. При хорошей погоде: -15. Ибо шашлыки вы любите.

  – пришло от N/5 до N/3 человек: при плохой погоде +20 — вы играете в мафию и вам весело. При хорошей погоде: -12. Лучше бы вы играли в мафию, поедая шашлыки.

  – пришло от N/3 до N/2 человек: при плохой погоде: +10 — в кофейне становится тесновато. При хорошей погоде: -20. Вам душно и хочется на свежий воздух.

  – пришло больше N/2 человек: при плохой погоде: вы теряете количество баллов, равное половине количества пришедших — в кофейне просто нечем дышать. Начинаются драки за место у окна. При хорошей погоде: вы теряете количество баллов, равное удвоенному количеству пришедших. Вы очень жалеете, что не пошли гулять.

- **Остаться дома**. При хорошей погоде вы теряете 5 очков, а при плохой получаете 5 очков.

Ну а теперь попробуем договориться?

6 Эх, дороги!

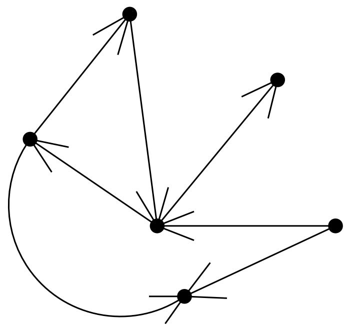
Все мы регулярно пользуемся транспортом — и общественным, и частным. Сегодня мы будем обсуждать в основном его.

На самом деле, моя кандидатская диссертация была посвящена математическому моделированию транспортных потоков, поэтому эта тема мне наиболее близка.

6.1 Ориентированный граф

Что вообще мы знаем о трафике? Что такое дорожная сеть?

Логично, что транспортная сеть — это некий граф, причём ориентированный.



Граф называется ориентированным, если его рёбра имеют направление. Изображается это обычно стрелкой на конце в какую-либо сторону (рисунок). Если это не оговорено, в ориентированном графе обычно не могут существовать два ребра между двумя вершинами, одно из которых направлено в одну сторону, а другое — в другую. В транспортных графах, в отличие от графов олимпиадной математики, две вершины графа могут быть, а, если точнее, почти всегда соединены ребрами, ориентированными в двух направлениях.

Аналогично с понятием степени вершины, в ориентированном графе вводятся понятия «полустепень захода» и «полустепень исхода» — количество рёбер, входящих в вершину и исходящих соответственно. Неориентированный граф разбивается на компоненты связанности, чего нельзя сказать об ориентированном графе, структура его более сложная.

Определение. вершины u и v графа называются сильно связанными, если существует путь по рёбрам от u до v и от v до u (передвигаться можно только по направлению стрелок!).

Определение. граф называется сильно связанным, если любые две его вершины сильно связаны.

Любой граф разбивается на компоненты сильной связанности, между которыми проведены ориентированные рёбра (рис. 1).

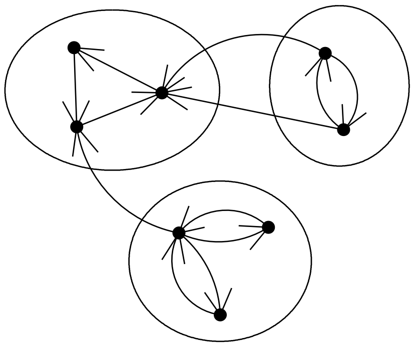


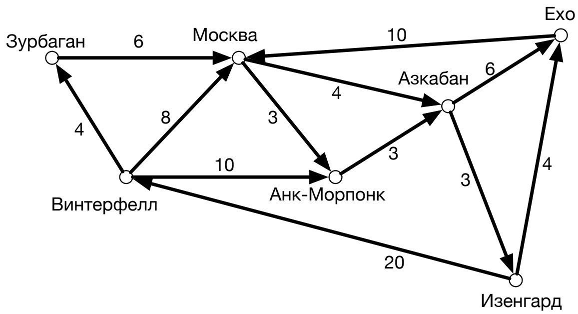
Рис. 1: Компоненты сильной связанности.

В теории транспортных потоков мы будем считать, что из любого места можно попасть в любое другое, то есть, дорожный граф сильно связан.

6.2 Взвешенный граф

Что ещё нам надо знать о дорогах? Дороги бывают разной длины, значит, можно сказать, что граф является взвешенным — каждому ребру можно поставить в соответствие число, например, являющееся длиной соответственной дороги.

Если все дороги находятся в одинаковом состоянии и абсолютно пусты, то данная картина уже может многое сказать о том, сколько времени, например, мы будем добираться от одного города до другого и через какие города нам лучше всего ехать.



В данном графе, например, мы можем убедиться, что из Винтерфелла в Ехо быстрее всего добираться через Москву и Азкабан.

6.3 Переменная длина ребра

В реальности, однако, одно расстояние отражает реальное положение дел далеко не полностью.

Например, что вы предпочтёте — проехать 50 километров по разбитой деревенской грунтовой дороге или 100 километров по свежепостроенной автостраде? Логично, что во втором случае и время в пути, и комфорт превысят таковые для первого случая.

Но, в то же время, если автострада забита автомобилями и представляет из себя огромную пробку, а деревенская дорога абсолютно пуста — ваш выбор, очевидно, поменяется.

Поставим каждому ребру в соответствие функцию, выражающую время в пути от количества автомобилей. Логично, что чем больше автомобилей — тем больше время в пути, то есть, функция возрастающая (хотя, возможно, и не строго, например, пока машин на автостраде мало, они совсем друг другу не мешают). Мы будем рассматривать только самые простые зависимости — например, что вес каждого ребра — линейная функция.

Естественно, что водитель, выбирая оптимальную траекторию, обращает внимания не только на время в пути, но и на комфорт передвижения, цену проезда по платной дороге, и так далее. Но мы, чтобы не вляпаться в жуткую математику и экономику, будем оценивать только время в пути.

В 1952-м году английский ученый Дж. Г. Вардроп представил миру свои два принципа равновесия, относящихся к концепции равновесия Нэша из теории игр, разработанных независимо друг от друга.

1. Первый принцип во многом совпал с идеями 1920-годов, высказанными в соавторстве с Ф. Найтом. Его формулировка: «время на поездку на всех используемых к данному моменту путях всегда будет не больше, чем время на поездку по путям неиспользуемым; каждый из участников потока независимо от остальных в каждый момент времени пытается выбрать наиболее оптимальную траекторию движения». Этот принцип называется «User equilibrium»

2. Второй принцип равновесия гласит, что оптимальное время поездки достигается только при совместных усилиях всех участников потока. Это — случай «System optimum». Например, данного принципа поддерживаются транспортные средства, управляемые централизованно.

В обоих случаях каждый водитель полагает, что его влияние настолько незначительно, что никак не повлияет на дорожную ситуацию.

Будем рассматривать равновесие отдельных автомобилей. Более простой формулировкой данного принципа будет: «время движения между двумя пунктами будет одинаковым, какой бы из установившихся маршрутов мы не выбрали». И правда, если есть какой-то путь с меньшим временем в пути, то часть машин поедут там, и в конце концов установится новое равновесие. Что вообще есть равновесие? Если каждый день в одно и то же время одному и тому же набору автомобилей надо переехать из одного места в другое, то как в итоге они будут ездить через некоторое время? Какие «любимые маршруты» выберет каждый автомобилист?

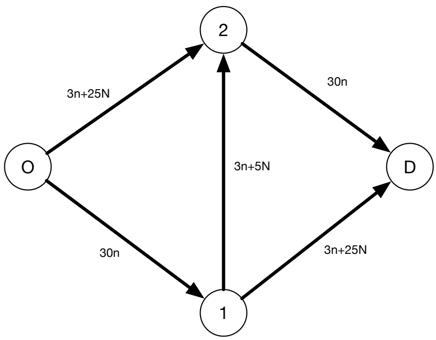
День за днём каждый водитель, владея информацией, как прошёл предыдущий день для транспорта (посмотрев в яндекс-пробки и поняв, где пробок было меньше всего) принимает решение — ехать так же, как и вчера, или поменять свою траекторию? Чем больше были пробки на его маршруте и чем меньше на других — тем скорее он поменяет траекторию. Когда он увидит, что везде пробки абсолютно одинаковые — тогда и установится равновесие. Равновесие, установившиеся в несколько ходов, называют **итерационным равновесием**.

В 1956 году Бекман (Beckmann), Макгуайр (McGuire) и Уинстен (Winsten) впервые построили математическую модель сетевого равновесия, в которой оптимум является равновесием Нэша-Вардропа. То есть, по сути математизировали движение автомобилистов и сказали, что общее минимальное время в пути будет достигаться тогда, когда каждый автомобилист уже определился со своим маршрутом.

6.4 Поехали!

Давайте сыграем с вами опять.

Вас всего N человек. Пусть задержки по рёбрам транспортного графа определяются следующим образом:



n — количество человек, едущих по данной дороге.

Ваша цель — попасть из пункта O в пункт D. Выигрышем данной игры для каждого из вас будет разница между вашим временем в пути и временем самого медленного из вас.

У каждого игрока существуют три стратегии — $O-1-D$, $O-2-D$ и $O-1-2-D$.

Игра групповая, вы можете и должны обсуждать вашу стратегию. Игра открытая, каждый знает о ходах другого игрока. Для того, чтобы всё было честно и одновременно — вы пишете свой выбор одной из трёх стратегий на бумаге, подписываете и сдаёте их мне.

(Играем в игру, обсуждаем результаты)

6.5 Пример поиска равновесия в транспортной сети

Найдём то равновесие, к которому вы бы пришли, будь у вас больше времени и больше итераций.

Пусть количество человек, едущих по траекториям:

1. $O-1-D$ — a автомобилей,
2. $O-2-D$ — b автомобилей,
3. $O-1-2-D$ — c автомобилей.

Логично, что тогда $a+b+c=N$.

Тогда по каждой дороге едут:

- Из пункта O в пункт 1 — $a+c$ автомобилей,
- Из пункта O в пункт 2 — b автомобилей,
- Из пункта 1 в пункт 2 — c автомобилей,
- Из пункта 1 в пункт D — a автомобилей,

- Из пункта 2 в пункт D — $b + c$ автомобилей.

.

В принципе, знающие физику заметят, что потоки автомобилей по сути удовлетворяют первому правилу Кирхгофа — сколько автомобилей заехало на перекрёсток, столько из него и выехало, новые автомобили там не рождаются и автомобильные жертвы перекрёстки в математических моделях не принимают.

Рассчитаем задержки на каждом пути:

1. На траектории $O-1-D$ — $30 \cdot (a+c) + 3 \cdot a + 25N$,
2. На траектории $O-2-D$ — $3 \cdot b + 25N + 30 \cdot (b+c)$,
3. На траектории $O-1-2-D$ — $30 \cdot (a+c) + 3 \cdot a + 5N + 30 \cdot (b+c)$.

Выпишем условие равновесия в транспортной сети:

$$30 \cdot (a+c) + 3 \cdot a + 25N = 3 \cdot b + 25N + 30 \cdot (b+c) = 30 \cdot (a+c) + 3 \cdot c + 5N + 30 \cdot (b+c)$$

.

Из первого равенства очевидно, что $a = b$.

Из второго, подставив, получим, что

$$3 \cdot a + 25N + 30 \cdot (a+c) = 30 \cdot (a+c) + 3 \cdot c + 5N + 30 \cdot (a+c),$$

$$3 \cdot a + 20N = 30 \cdot (a+c) + 3 \cdot c.$$

Учтя, что $a + b + c = N$, получим:

$$3 \cdot a + 20(a + a + c) = 30 \cdot (a+c) + 3 \cdot c.$$

$$3a + 40a + 20c = 30a + 30c + 3c,$$

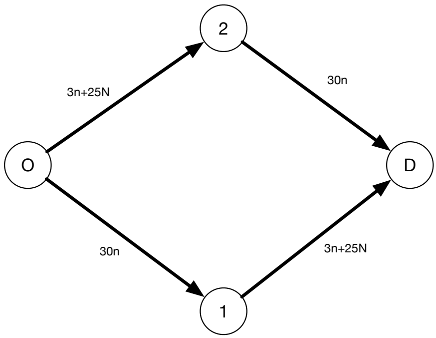
Откуда $a = c$. Значит, в равновесии потоки распределены равномерно. Тогда общее время в пути для каждого будет равно:

$$30\frac{2N}{3} + 3\frac{N}{3} + 25N = 46N.$$

6.6 Всегда ли выгодно строить новые дороги?

Как вы думаете, что изменится, если мы взорвём дорогу, соединяющую пункты 1 и 2?

Найдём равновесие в данной транспортной игре.



Пусть количество человек, едущих по траекториям:

1. $O - 1 - D$ — a автомобилей,
2. $O - 2 - D$ — b автомобилей,

$a + b = N$.

Рассчитаем задержки на каждом пути:

1. На траектории $O - 1 - D$ — $30 \cdot a + 3 \cdot a + 25N$,
2. На траектории $O - 2 - D$ — $3 \cdot b + 25N + 30 \cdot b$,

Выписав условия равновесия, получим, что $a = b = \frac{N}{2}$.

Тогда общее время в пути для каждого будет равно:

$$30\frac{N}{2} + 3\frac{N}{2} + 25N = 41.5N.$$

Что же мы видим? Мы закрыли дорогу, а ситуация стала только лучше! Что же это было?

6.7 Парадокс Браесса

В шестидесятых годах Дитрих Браесс столкнулся с парадоксом, который впоследствии был назван «парадокс Браесса».

Пример такого парадокса мы только что описали. Механизм образования парадокса Браесса во многом перекликается с дилеммой заключенного из теории игр – каждый выбирает оптимальную для себя стратегию, этим самым только ухудшая оптимальное равновесие.

Такие парадоксы были обнаружены во многих местах. Например, весьма известен парадокс, обнаруженный во Владивостоке.

Этот же парадокс был найден в Нью-Йорке при закрытии 42-ой улицы в 1990 году, в Штутгарте, когда закрыли свежепостроенную дорогу, в Сеуле, и так далее.

Как показали Роугарден и Вэлиант в 2006 году, данный парадокс встречается с большой вероятностью в случайных графах, то есть в случайно построенных транспортных сетях. Может показаться, что проблема надуманна и достаточно найти неэффективные ребра в имеющейся сети и правильно строить дороги в дальнейшем. Однако все сложнее. Ранее (в 2001 году) Роугарден показал, что даже при достаточно общих предположениях о свойствах транспортной сети, которые обычно закладываются в реальные модели городов, поиск неэффективных ребер является NP-сложной задачей, то есть фактически не решаемой. С другой стороны, как показал Мильтах, единственная сеть, в которой не может реализоваться парадокс Браесса — это сеть параллельных дорог. Все это говорит о том, что непродуманное увеличение числа дорог может не только не улучшить ситуацию, но даже ухудшить её.

6.8 Поиск кратчайшего пути

Вернёмся к эгоистичным водителям. Каждый человек, собираясь в путь, смотрит на дорожную ситуацию. Большинство людей, выбирая траекторию движения, полагают, что в течение всего пути транспортная ситуация меняться не будет, то есть, выбирает кратчайшую дорогу на ориентированном графе с постоянными весами рёбер.

Выбрать кратчайший путь на простых графах — очень легко. А что делать, если мы ищем кратчайший путь на большом графе?

Расскажем о самом известном из не переборных алгоритмов — **алгоритме Дейкстры**.

В алгоритме Дейкстры ищутся кратчайшие пути из заданной вершины во все остальные. Можно считать, что алгоритм Дейкстры строит направленный граф кратчайших путей без циклов. Графы без циклов называются деревьями, так что алгоритм Дейсктры строит Дерево Кратчайших Путей (ДКП), по английски — Shortest Path Tree, SPT. Этот алгоритм нужен не только в наших задачах о поездках, он применяется, например, ещё и в компьютерных сетях. Есть много его вариантов, давайте рассмотрим тот, который предложил сам Дейкстра.

Этот алгоритм состоит из конечного количества шагов (вы же понимаете, что алгоритм, состоящий из бесконечного количества шагов бесполезен, так как никогда не завершится?). Каждый шаг заключается в том, что к уже построенному до этого ДКП мы добавляем ровно одну вершину. В самом начале алгоритма ДКП состоит ровно из одной *корневой* вершины, которую мы назовём s, от слова *source* — источник. Для алгоритма нам понадобится массив d, значения элементов d_i которого будут кратчайшие расстояния от корневого узла до узла i. Вначале все элементы этого массива содержат бесконечность, за исключением элемента с номером s. Матрица w содержит элементы w_{ij}, которые равны расстоянию от узла i до узла j, если они — соседи или бесконечность, если они — не соседи.

Один шаг, или как говорят алгоритмисты, *итерация* алгоритма заключается в следующем.

1. В ДКП заносится корневой узел (исток).

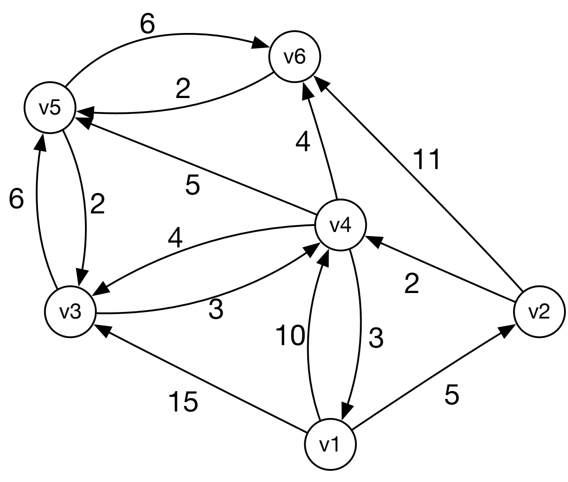
2. На каждом шаге в ДКП добавляется одно ребро, которое формирует кратчайший путь из истока в не-ДКП. Операция изменения старой кратчайшей длины на новую называется *релаксацией*.

3. Вершины заносятся в ДКП в порядке их расстояния по ДКП от начальной вершины.

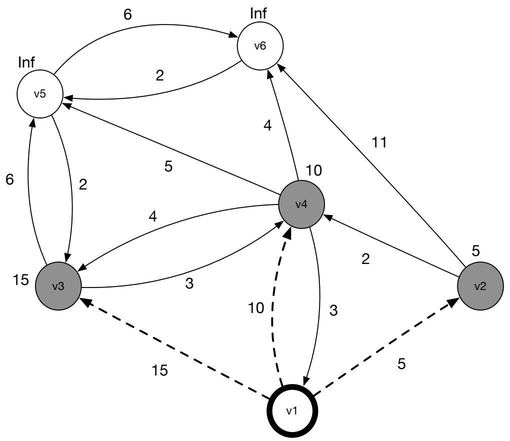
Посмотрим на примере.

Давайте рядом с каждым из узлов писать значение уже достигнутого расстояния до него от корневого узла.

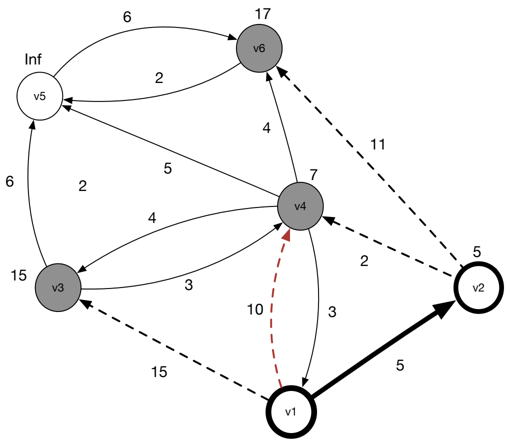
Исходный граф



Помещаем v_1 в ДКП, а v_2, v_3 и v_4 помечаем серым цветом, они наши кандидаты на узлы выбора для следующего шага.

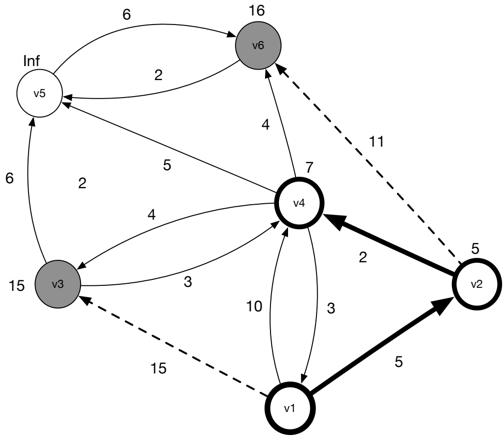


Пробежимся по всем серым узлам. Пусть, например, выбран узел v_2. Мы корректируем расстояния от него. Релаксация: бывший кратчайший путь $(1 \to 4)$ заменён на $(1 \to 2 \to 4)$. Пересчитываем расстояние и пишем новое число рядом с 4. Узел v_2 — самый близкий к ДКП, выкрашиваем его в чёрный цвет.

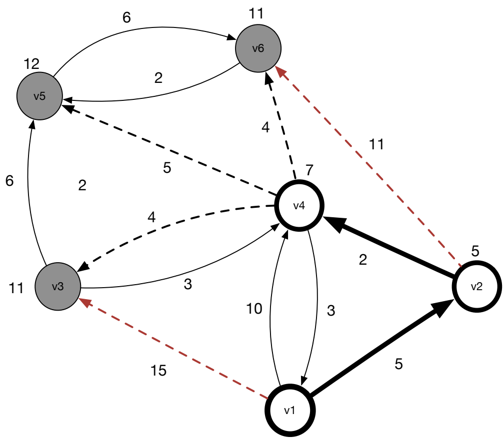


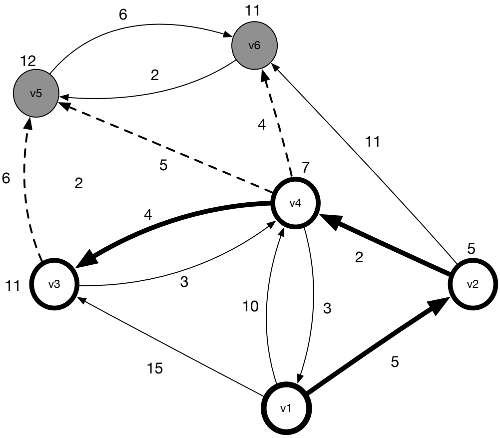
В ДКП у нас v_1 и v_2, в не-ДКП - остальные.

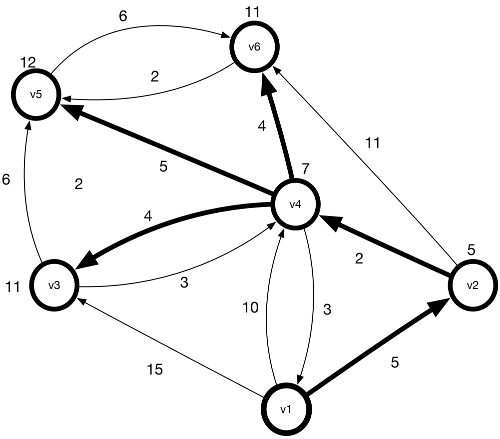
Нетрудно убедиться, что теперь в ДКП попадёт узел v_4, как наиболее близкий от не-ДКП к ДКП. Проводим все релаксации.



При просмотре узла v_5 как кандидата проводится группа релаксаций: $(1 \to 2 \to 6)$ заменено на $(1 \to 2 \to 4 \to 6)$, $(1 \to 3)$ на $(1 \to 2 \to 4 \to 3)$







У этого алгоритма очень много реализаций, мы рассмотрели одну из самых простых.

На выходе алгоритма получено искомое Дерево Кратчайших Путей.

Таким образом, можно, например, оценить, сколько времени ехать в каждое место на карте, аналогичные схемы используются при оценках времени в пути в различных мобильных приложениях.

6.9 Поиск максимального потока

Теперь мы знаем, как добраться до места назначения побыстрее. А как вообще определить, все ли автомобили могут проехать по данному маршруту, или пропускная способность транспортной сети ограничена?

Например, рассмотрим Москву 9-го мая. Все хотят попасть в центр на парад, но часть дорог вообще перекрыта, а часть — просто имеет ограниченную ширину. Как узнать максимальное число автомобилей, которые могут проехать в центр за, скажем, один час? То есть, как узнать **максимальный поток** между стартом и финишем, источником и стоком?

Толчком к созданию алгоритмов определения наибольшей пропускной способностей, как это бывает, дала вторая мировая война. Математик Джордж Бернард Данциг, работавший в отделе статистического управления ВВС США, занимался анализом военных действий. Требовалось создать математическую модель, способную определить, каким образом можно быстро сконцентрировать войска и войсковую инфраструктуру вблизи критических точек на театре военных действий. Результаты его работы, в частности, послужили основой для операции по блокаде Западного Берлина в 1948-1949 годах. В более общем виде, как задача определения пропускной способности рёбер транспортного графа была поставлена им в 1951 году, а в 1955 году Лестер Форд и Делберт Фалкерсон впервые разработали алгоритм, решающий именно эту задачу (думаю, что фамилию Лестера Форда вы знаете, именно он разработал один из популярных алгоритмов теории графов, названный впоследствие алгоритмом Форда-Беллмана).

Хорошее решение данной задачи критически важно для современных транспортных графов (например, в транспортном графе Москвы более 100000 узлов!), поэтому этот алгоритм постоянно улучшался математиками. Последнее улучшение, после перерыва в 10 лет, было предложено математиками из МТИ Кёлнером и Мондры, Спилманом из Йельского университета и Шень-Хуа из Южно-Калифорнийского Университета.

Давайте посмотрим на идеи, лежащие в алгоритма Форда-Фалкерсона.

Определение. Ёмкость ребра — максимальное интенсивность потока, проходящего через ребро.

Определение. Насыщенное ребро — ребро, по которому проходит максимальный поток.

Алгоритм ищет поток в сети из источника (*source*) в сток (*destination*).

Каждому ребру мы будем ставить в соответствие пару чисел (c, l). c — достигнутый до сих пор поток по ребру, вначале он равен нулю, затем это число будет только увеличиваться, пока не достигнет l, ёмкости ребра.

Алгоритм продолжается, когда на хотя бы одном маршруте из s все рёбра — ненасыщенные, то есть на всех рёбрах $c < l$.

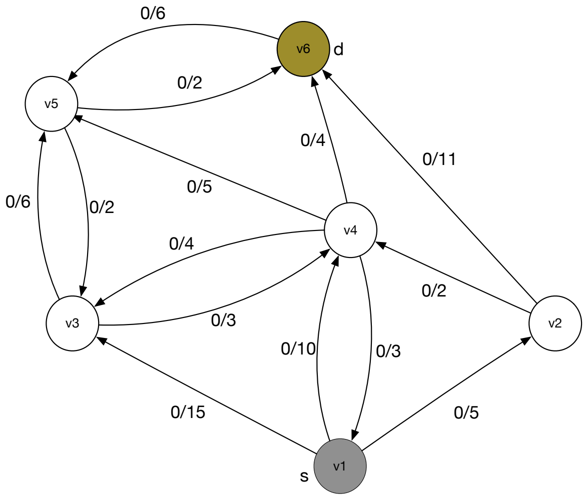
1. Ищем любой маршрут, содержащий только ненасыщенные рёбра из s в d. Если такого нет, то алгоритм закончен, искомый поток есть сумма потоков всех рёбер, приходящих в d.

2. Мы нашли **дополняющий маршрут**. Определяем значение максимального потока m, который мы можем пропустить по данному маршруту. Он определяется как минимальная из всех возможных разностей ёмкости l и существующего потока c по всем рёбрам маршрута.

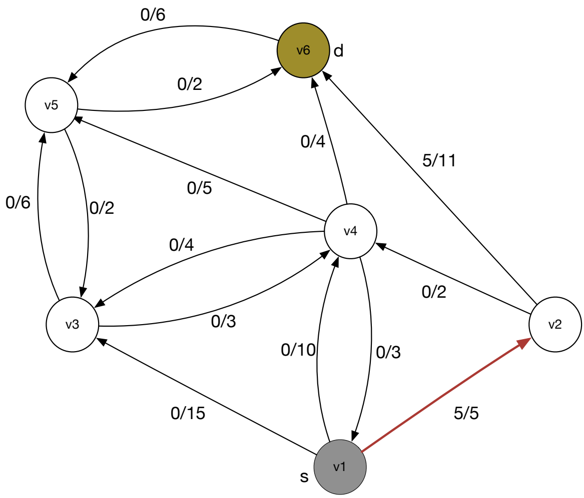
3. К каждому из c на маршруте прибавляем m. Хотя бы одно ребро станет насыщенным.

4. Возвращаемся к (1).

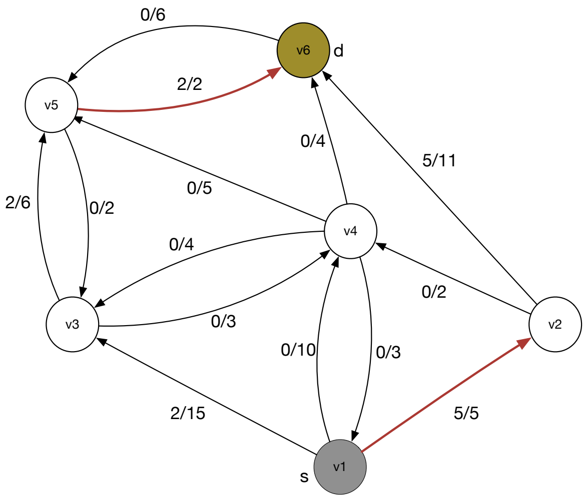
Попробуем прогнать этот алгоритм на графе, который мы только что видели. Числа, которые показывали длину ребра, пусть теперь станут ёмкостью ребра. Будем искать максимальный поток от $v1$ до $v6$. На рисунке каждое ребро теперь характеризуется парой чисел c/l.



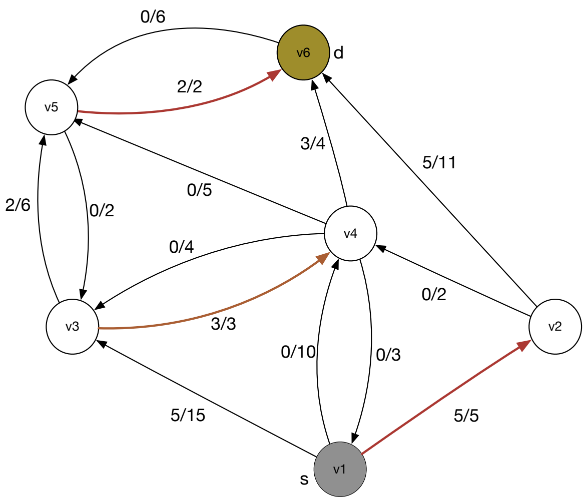
Найдём произвольный маршрут из s в d. Пусть это будет маршрут $v1 \to v3 \to v6$. Наименьшая разница между l и c равна 5, поэтому мы пропускаем поток с интенсивностью 5 по этому маршруту. Заметим, что ребро $v1 \to v2$ стало насыщенным и не способно пропускать через себя другие потоки.



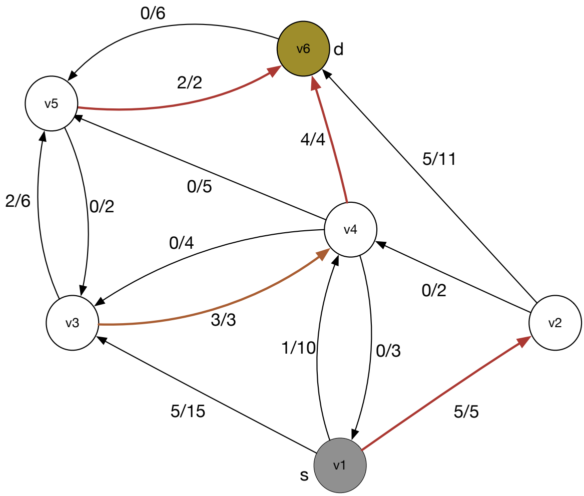
Найдём ещё один маршрут из $v1$ в $v6$. Через $v2$ все дороги для нас теперь закрыты. Попробуем $v1 \to v3 \to v5 \to v6$. m для этого маршрута равен двум. Корректируем числа и отмечаем насыщенные рёбра.



Следующий этап — маршрут $v1 \to v3 \to v4 \to v6$.



Следующий этап — маршрут $v1 \to v4 \to v6$. На ребре $v4 \to v6$ имеется резерв для потока, равный 1. Он и даёт нам значение m.



Всё, любой маршрут из $v1$ в $v6$ задевает насыщенные рёбра, результат равен сумме всех потоков на рёбрах, приходящих в $v6$, то есть, $2 + 4 + 5 = 11$. Подсчитаем, сумму потоков всех рёбер, исходящих из $v1$. $5 + 5 + 1 = 11$. Совпадение ли это?

Где бы вы построили дорогу и какой ёмкости, чтобы увеличить поток от $v1$ к $v6$?

7 Приложение. Математическая теория зайцев

Рассмотрим очень интересную математическую теорию зайцев, предложенную студентом МФТИ Никитой Плетнёвым.

От Москвы до Долгопрудного быстрее всего, да и дешевле всего, добраться на электричке. От физтеха до ближайшего крупного гипермаркета тоже надо ехать на электричке от станции Новодачная до станции Марк. Проехать надо всего одну станцию, поэтому студенты МФТИ очень любят ездить зайцем. Это выгодно, но только, если не поймают. Если поймают, то придётся не только за билет заплатить, но ещё и штраф, а бедным голодным студентам очень этого не хочется.

Будем рассматривать сферических студентов в вакууме, не учитывая такие факторы, как сложность бега от контролёров в заполненном вагоне, попытки перебежать вагон на станции или выходы со станций окольными путями и выходы из электрички из окна (то есть, тоже окольными путями). Сферические контролёры в вакууме натолкнувшись на безбилетника, штрафуют его всегда.

Причём здесь сферические студенты? Потому что весь наш курс мы изучали именно это.

Напомним один анекдот:

Решил миллиардер разработать метод узнать, кто на скачках победит. Позвал биолога, математика и физика, дал задание, миллион долларов и год времени.
Через год приходит биолог: — Ну, зная точную родословную лошади, успехи её родителей, чем её кормили, как лечили, я могу точно назвать максимальную скорость.
Математик: — Имея точные статистические данные предыдущих забегов этих лошадей, я могу назвать приблизительные результаты этого….
Физик: — Мне нужно еще десять лет, пятьдесят миллионов долларов, несколько помощников и лаборатория, но я уже построил

модель движения абсолютно упругого сферического коня в вакууме!

Поэтому когда мы говорим о сферическом чём-то в вакууме — мы просто говорим об сильном упрощении математической модели этого чего-то.

Для ещё большего упрощения модели, будем полагать стоимость проезда одной зоны равной 20 рублям, а сбор за оформление билета в поезде — 100 рублей. Будем считать, что наш проигрыш — это та сумма, которую мы заплатили.

Построим матрицу для принятия решения о покупке билета на электричку по маршруту Новодачная — Марк. Будем рассматривать данную игру как игру с природой, считая появление контролёра случайным.

	Оплатить проезд	Быть ушастиком
Встретить контролёров	-20	-120
Не встретить контролёров	-20	0

Пусть вероятность неблагоприятного исхода равна p. Тогда математическое ожидание выигрыша в случае оплаты — -20, а в случае отказа от оплаты — $-120p$. Если мы ставим задачу максимизации выигрыша в среднем, после многих поездок, то при $p < 1/6$ выгодно ездить без билета, иначе лучше платить.

Для того, чтобы попытаться применить здесь какую-либо математику, сформулируем условия задачи немного более конкретно. Итак, пусть в поезде 9 вагонов, проход между ними свободный. Если в вагоне нет зайцев, контролёр идёт до соседнего вагона 30 секунд. На каждого зайца он тратит 15 секунд (выписывает билет). Замеченный безбилетник останавливается на месте под угрозой преследования полицией. Перебежка зайца из вагона в вагон во время движения требует 15 секунд, а за время стоянки можно пробежать 4 вагона. Перегон поезд проходит за 2-3 минуты. Пассажир может видеть, что происходит в соседних вагонах, контролёрам доступен для наблюдения только тот вагон, в котором они находятся. Выигрыш команды контролёров — сумма собранных сборов.

Здесь стратегия пассажира заключается в выборе, платить или не платить; в какой вагон заходить; сколько вагонов пробегать по платформе. Стратегия контролёров — в какой вагон заходить, в какую сторону идти. Внешние условия — время движения поезда. Пока мы считаем, что встреча зайца и контролёра — это безусловный максимальный проигрыш зайца и выигрыш контролёра (хотя в жизни бывают разные варианты).

Какие здесь возможны стратегии для пассажира?

- Примитивный вариант: сесть в первый или последний вагон в надежде, что не успеют дойти. Недостаток в том, что если в наш вагон пришли контролёры, или они зашли одновременно с нами, то бежать некуда.

- Другой способ: сесть в середину состава. Преимущество: есть возможность бежать в обе стороны. Недостаток: расстояние до конца поезда вдвое меньше.

- Напрашиваются варианты исправления той или другой стратегии. Очевидно, их эффективность зависит от выбора стратегии противником.

Теперь посмотрим на возможные стратегии противника.

- Способ: зайти в один из крайних вагонов, проверить всех за один проход поезда. Недостаток: можно не успеть за время в пути дойти до конца поезда; не исключено, что зайцы собрались именно там (тем более, при таком способе они, скорее всего, именно туда и побегут).

- Другой способ: зайти в середину состава и выбрать, в какой стороне можно попытаться поймать всех зайцев.

Матрица платежей для данной игры будет слишком объёмной, т. к. игра не заканчивается за один шаг, а вариантов её развития много (например, заяц может сразу убегать в конец поезда, а может бежать дальше, лишь увидев контроль в соседнем вагоне).

Разобьём игру на шаги (рассматриваем простой случай, когда всё действие происходит в пределах одной остановки). Возможные шаги зайца: остаться на месте, перейти на вагон вперёд, перейти на вагон назад. Возможные шаги контролёров: потребовать у пассажиров своего вагона предъявить билеты; перейти в один из соседних вагонов (считаем, что из этих двух операций состоит переход контролёров); «обработать» одного безбилетника (если в текущем вагоне такие есть).

Если t — время в пути в минутах, то игра заканчивается за $4t$ шагов. Заяц считается выигравшим, если его за это время не поймали; суммарный проигрыш команды зайцев и выигрыш команды контролёров — количество пойманных.

Очевидно, командная работа может уменьшить суммарный проигрыш пассажиров. Но для конкретного игрока «предательство» может обеспечить спасение от личного проигрыша. Это — частный случай дилеммы заключённого.

Вот пример, когда от одного человека зависит судьба всей команды: один заяц сидит в 3-ем вагоне, остальные во 2-ом и не могут бежать. Контроль находится в 4-ом и идёт в сторону 3-его. Время до остановки — 30 секунд. Если безбилетник переходит во 2-ой вагон, ловят всех; если в 1-ый — всех, кроме него. Если же остаётся, ловят только его, ценой 120 рублей он спасает народ.

Вам предлагается самим поиграть (естественно, на бумаге!) в эту игру, в том числе в случае двух бригад контролёров. Рассмотрим наиболее очевидные стратегии и последствия их встречи.

Стратегия зайца: зайти в вагон n, при появлении контролёров в соседнем вагоне перебегать на один вагон в противоположную от них сторону.

Стратегия контролёров: зайти в вагон m, проверить билеты, отрезать уши всем зайцам, перейти в соседний вагон, повторить. Идти до конца поезда, не меняя направления, потом обратно.

Заполним таблицу, в которую впишем количество шагов (не считая поимки других зайцев) до поимки в зависимости от n, m.

n	m	Направление движения контролёров	t
k	k	От головы к хвосту	0
k	<k	От головы к хвосту	9-m
k	>k	От головы к хвосту	17-m
k	k	От хвоста к голове	0
k	<k	От хвоста к голове	7+m
k	>k	От хвоста к голове	m-1

Пояснение к третьей строке: заяц будет пойман, когда контролёры дойдут до конца поезда и вернутся. Вторая половина таблицы получена «отражением» первой. Если t с учётом поимки других безбилетников больше времени в пути, заяц выиграл. Даже этот случай (если зайцев много) сложен для исследования и требует компьютерного моделирования, т. к. успех команды зависит от действий каждого участника.

Заметим, что все ситуации Парето-неулучшаемы, т. к. игра имеет нулевую сумму. Посмотрим, существует ли равновесие по Нэшу.

- Если проверены не все вагоны, возможно улучшение со стороны команды зайцев: просто ехать всем в одном из непроверенных вагонов. Равновесия по Нэшу нет.

- Если не пойман ни один заяц, возможно улучшение для контролёров: зайти в вагон, в котором есть хоть один заяц. Равновесия тоже нет.

- Если же контролёры успевают пройти все вагоны, то очевидно, что пойманы все зайцы. Равновесие может иметь место, а может и не иметь — это зависит от количества зайцев и шагов (например, если зайцы пойманы в последнем вагоне прямо перед выходом, то улучшение есть: один должен был ехать в предпоследнем, тогда остальные успели бы сбежать в то время, пока ему выдают билет).

Как мы можем заметить, найти равновесие по Нэшу в данной задаче затруднительно, причём, даже если мы его найдём, данная модельная задача всё равно требует доработки и данное решение РЖД не устроит.

Заключение

Хотелось бы верить, что вы теперь узнали много нового о теории игр и принятии решений. Конечно, те, кто из вас рассчитывал, что, прослушав эти лекции, он быстро прокачает своего пандарена до 100-го уровня, оказались разочарованными — мы об этом ничего не говорили. А говорили мы о том, что теория игр как раздел науки связана с многими другими областями науки — математикой (конечно же), экономикой, информатикой, психологией и даже философией. Вы увидели, что нормальное для каждого из людей стремление к эгоизму не приводит к наилучшему результату для всех вместе. А какие же математические темы у нас были? Теория вероятностей, комбинаторика, теория графов — всего и не перечислишь. Теория вероятностей была создана в своё время именно для того, чтобы определять, справедливым или нет является конкретный вариант игры в кости. Математическая экономика во многом основана на теории игр. Всё это — применения математики для решения практических задач — называются прикладной математикой и я надеюсь, мне удалось показать вам некоторые интересные её применения.

Список литературы

[1] Шень А. Игры и стратегия с точки зрения математики. — 2007.

[2] Шень А. Вероятность: примеры и задачи. М.: МЦНМО, 2008.

[3] Шеллинг Т. Стратегия конфликта. — М.: ИРИСЭН, 2007. — 366 с.

[4] Диксит А., Нейлбафф Б. Теория игр: Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. — Манн, Иванов и Фербер, 2014.

[5] Binmore K. Playing for real: a text on game theory. — Oxford university press, 2007.

[6] Самаров К. Л. Элементы теории игр. — 2009.

[7] Гончаров Е. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Исследование операций. Примеры и задачи //Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ. — 2005.

[8] Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. (2009). Алгоритмы. Построение и анализ:[пер. с англ.]. Издательский дом Вильямс.

[9] Фон-Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.,«Наука», 1970.

[10] Hayes B. Playing in Traffic //AMERICAN SCIENTIST. — 2015. — Т. 103. — №. 4. — С. 260-263.

[11] Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. — М. : Юнити, 1997.

[12] Коковин С. Г. Лекции по теории игр и политологии. — 2003.

[13] Д.А. Дагаев, А.В. Михайлович, К.И. Сонин, И.А. Хованская, И.В. Щуров. Теория игр, 2011/2012 учебный год, Факультет прикладной политологии НИУ Высшая школа экономики, http://math-hse.info/s11/6

[14] Walker, P. (2012). A Chronology of Game Theory. Electronic resource

[15] Witthaut D., Timme M. Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage //New Journal of Physics. — 2012. — Т. 14. — №. 8. — С. 083036.

[16] Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б., Введение в математическое моделирование транспортных потоков, МЦНМО, М., 2013

[17] Савватеев Алексей Владимирович, Теория игр, Лекторий МФТИ, http://lectoriy.mipt.ru/course/Maths-GameTheory-15L

[18] Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. — 1967.

[19] Вагнер Г. Основы исследования операций. — М.: Мир, 1972.

[20] Губко М. В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. Издание 2, М.: 2005

[21] Некрасов С.И., Захаров А.М. Становление философских представлений о необходимости и случайности // Современные проблемы науки и образования. – 2007. – № 1. – С. 150-154;

Подписано в печать 05.08.2016. Формат $60 \times 84/16$. Усл. печ. л. 12,09. Тираж 300 экз. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г.Долгопрудный, Институтский пер., 9