

УДК 519.634

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ НА ГЕКСАЭДРАЛЬНЫХ СЕТКАХ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ<sup>1)</sup>

© 2015 г. В. И. Голубев, И. Б. Петров, Н. И. Хохлов, К. И. Шульц

(141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ)

e-mail: w.golubev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2014 г.

Целью данной работы является исследование волновых процессов, происходящих в геологическом трещиноватом массиве в процессе сейсмической разведки. Авторами проведено расширение сеточно-характеристического метода на гексаэдральные сетки на случай упругой среды, содержащей пустые и флюидонасыщенные трещины. Для учета влияния трещиноватости на волновые процессы, происходящие в среде, предложено выделение неоднородностей на этапе построения расчетной сетки с постановкой граничных условий и условий на бортах трещин в явном виде. С использованием данного метода получены волновые картины вблизи протяженной наклонной геологической трещины. Ставится задача по численному расчету сейсмического отклика от кластера вертикальных и субвертикальных трещин в полной трехмерной постановке. Проведено исследование его структуры и влияния вида заполнителя на регистрируемый на поверхности сигнал. Библ. 26. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** гиперболические уравнения, сеточно-характеристический численный метод, математическое моделирование, трещиноватые среды.

DOI: 10.7868/S0044466915030096

### ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, прямой метод характеристик был изначально предложен в работе [1]. В дальнейшем, он был обобщен на случай двумерных [2] и трехмерных [3], [4] задач. Основным его недостатком является сгущение расчетных узлов в отдельных областях расчетной области, что приводит к снижению точности расчетов вдали от них. В дальнейшем в работах в [5], [6] был предложен метод обратных характеристик (сеточно-характеристический метод) на фиксированных расчетных сетках. Вышеперечисленные методы успешно применялись для получения гладких решений задач газовой динамики. Для обеспечения возможности корректного расчета разрывных решений были предложены сеточно-характеристические методы с явным выделением разрывов (см., [7], [8]).

Одним из важных свойств численных методов является монотонность (см. [9]). К монотонным схемам относится, например, схема первого порядка аппроксимации (см. [10]). В [11], [12] предложены монотонные гибридные схемы повышенного порядка точности. Общий подход к построению таких схем с использованием пространства неопределенных коэффициентов был предложен в [10], [13]. Также для повышения порядка сходимости без расширения расчетного шаблона в [14] предложена монотонная схема с использованием продолженных систем.

Изначально сеточно-характеристический метод был применен для задач газовой динамики, а к задаче описания динамических процессов в сплошных средах он адаптирован сравнительно недавно. Среди первых работ, посвященных его применению для численного решения многомерных уравнений динамики упругих, а также упругопластических и вязкоупругих, сред можно отметить работы [15], [16]. В работе [17] с использованием сеточно-характеристического метода решались трехмерные волновые задачи теории упругости. Работа [18], по-видимому, является одной из первых отечественных работ, в которой рассматривались волновые задачи геофизики.

<sup>1)</sup> Исследование выполнено в рамках работы по гранту РНФ № 14-11-00263 и при частичной финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-2548.2013.5.

В [19] сеточно-характеристический метод обобщен на случай численного решения вязкоупругих волновых задач, в [20] — для исследования сложных волновых процессов в средах многослойной структуры. В дальнейшем разработаны методы до пятого порядка точности, как на гексаэдральных (см. [21]), так и на тетраэдральных расчетных сетках для трехмерных задач (см. [22]). В [23] сеточно-характеристический метод на треугольных сетках расширен на случай моделирования геологической среды с явным выделением неоднородностей (в том числе трещин) и измельчения расчетной сетки вблизи них для повышения точности расчета.

В настоящей работе проведено обобщение сеточно-характеристического метода на гексаэдральных сетках для моделирования динамических процессов в трещиноватых средах. Предложен способ построения гексаэдральной расчетной сетки с явным выделением бортов каждой трещины и использования на них соответствующих граничных условий. С его помощью проведено решение задачи о распространении продольной волны в среде, содержащей одну наклонную трещину (в двумерной постановке), а также кластер вертикальных и субвертикальных трещин (в трехмерной постановке).

### ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Рассмотрим основные уравнения линейной динамической теории упругости, которым подчиняется состояние бесконечно малого объема линейно-упругой среды:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij}, \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $v_i$  — компоненты вектора скорости смещения,  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{kl}$  — компоненты тензоров напряжений Коши и деформации,  $\nabla_j$  — ковариантная производная по  $j$ -й координате. Вид компонент тензора 4-го порядка  $q_{ijkl}$  определяется реологией среды. Для линейно-упругого случая они имеют вид

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука,  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе, а  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Первая строка в системе (1) представляет три уравнения движения, вторая — шесть реологических соотношений. Вектор искомых функций, состоящий из 9-ти компонент, имеет вид

$$\mathbf{u} = \{v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}^T.$$

Отметим, что система динамики деформируемого твердого тела (1) может быть записана в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \tag{2}$$

где  $\mathbf{A}_j$  — матрицы размера  $9 \times 9$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$  — ортонормированная система координат.

Для ее решения используется сеточно-характеристический метод на криволинейных гексаэдральных расчетных сетках из [21]. Исходная система уравнений (2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbf{A}}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \mathbf{A}_i, \tag{3}$$

где  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — направления расщепления в преобразованном пространстве. Система (3) распадается на три одномерные системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{A}}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Каждая из этих систем является гиперболической и обладает полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями. Каждую из систем можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{\Omega}_j^{-1} \mathbf{\Lambda}_j \mathbf{\Omega}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j},$$

где матрица  $\mathbf{\Omega}_j$  – матрица, составленная из собственных векторов,  $\mathbf{\Lambda}_j$  – диагональная матрица. Для каждого шага расщепления для направления  $\xi_j$  матрица  $\mathbf{\Lambda}_j$  имеет вид

$$\mathbf{\Lambda}_j = \text{diag}\{c_1 l_j, -c_1 l_j, c_2 l_j, -c_2 l_j, c_2 l_j, -c_2 l_j, 0, 0, 0\},$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad l_j = |w^j| = \sqrt{(w_1^j)^2 + (w_2^j)^2 + (w_3^j)^2}, \quad w^j = \nabla \cdot \xi_j.$$

Для определения коэффициентов  $w^j$  вычисляется матрица, обратная к матрице Якоби. Отметим, что ее необходимо вычислять в каждой ячейке. Коэффициенты могут быть вычислены аналитически в случае, когда преобразование задано в виде  $\xi = \xi(\mathbf{x})$ , либо численно, используя формулы второго порядка точности  $(w_i^j)_m = ((\xi_j)_{m+1} - (\xi_j)_{m-1})/\Delta x_i$ .

После замены переменных  $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \mathbf{u}$  каждая из систем (4) распадается на девять независимых скалярных уравнений переноса (индекс  $j$  далее опускается, где это возможно) вида

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_j} = 0.$$

Одномерные уравнения переноса решаются с помощью метода характеристик (см. [8, 24]). После того, как все компоненты  $\mathbf{v}$  перенесены, восстанавливается само решение:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{v}^{n+1}.$$

В программе реализованы схемы 2-4-го порядка точности. В работе расчеты проводились с использованием схемы 4-го порядка точности

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= v_m^n - \sigma(\Delta_1 - \sigma(\Delta_2 - \sigma(\Delta_3 - \sigma\Delta_4))), \\ \Delta_1 &= \frac{1}{24}(-2v_{m+2}^n + 16v_{m+1}^n - 16v_{m-1}^n + 2v_{m-2}^n), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{24}(-v_{m+2}^n + 16v_{m+1}^n - 30v_m^n + 16v_{m-1}^n - v_{m-2}^n), \\ \Delta_3 &= \frac{1}{24}(2v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 4v_m^n - 2v_{m-2}^n), \\ \Delta_4 &= \frac{1}{24}(v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n). \end{aligned}$$

Кроме того, используется сеточно-характеристический критерий монотонности. В случае положительного значения  $\lambda$  критерий монотонности имеет следующий вид

$$\min\{v_m^n, v_{m-1}^n\} \leq v_m^{n+1} \leq \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}.$$

Для отрицательных значений  $\lambda$  он будет симметричен. В простейшей реализации в случае невыполнения данного критерия монотонности применяется корректировка решения вида

$$v_m^{n+1} = \begin{cases} \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, & v_m^{n+1} > \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, \\ \min\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, & v_m^{n+1} < \min\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, \\ v_m^{n+1}, & \min\{v_m^n, v_{m-1}^n\} \leq v_m^{n+1} \leq \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}. \end{cases}$$

Данный ограничитель сохраняет 4-й порядок в областях, где решение ведет себя достаточно гладко (выполняется характеристический критерий). В случае больших градиентов решения порядок схемы понижается до 3-го.

Приведенный выше алгоритм позволяет находить решение во внутренних точках области. Для этого случая все характеристики, выходящие из расчетного узла на следующем временном слое, остаются лежать в области интегрирования. В граничных узлах ситуация иная. Одна характеристика выходит из расчетной области (см. [25]). В таком случае необходимо использовать граничные условия. Учет граничных условий осуществляется практически одинаково для всех границ. Рассмотрим переход от инварианта Римана к естественным переменным в граничном узле:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{v}^{n+1} = \sum_i v_i^{n+1} \mathbf{r}_i, \tag{5}$$

где  $\mathbf{r}_i$ -векторы – столбцы матрицы  $\mathbf{\Omega}^{-1}$ ,  $v_i^{n+1}$  – соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{v}^{n+1}$ . Разобьем сумму (5) на две части. Для первого слагаемого оставим те члены, для которых соответствующие характеристики попадают внутрь расчетной области, обозначим множество индексов  $i$  через  $\lambda^{in}$ . У второго оставим те характеристики, которые выходят за границы области интегрирования, т.е.  $\lambda^{out}$ . Тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}^{n+1} = \sum_i v_i^{n+1} \mathbf{r}_i = \sum_{i \in \lambda^{in}} v_i^{n+1} \mathbf{r}_i + \sum_{i \in \lambda^{out}} v_i^{n+1} \mathbf{r}_i = \sum_{i \in \lambda^{in}} v_i^{n+1} \mathbf{r}_i + \mathbf{\Omega}^{out} \mathbf{v}^{out} = \mathbf{u}^{in} + \mathbf{\Omega}^{out} \mathbf{v}^{out}, \tag{6}$$

где  $\mathbf{\Omega}^{out}$  – прямоугольная матрица, составленная из правых собственных векторов, соответствующих характеристикам, которые выходят за область интегрирования. Вектор  $\mathbf{v}^{out}$  – вектор, составленный из соответствующих компонент инварианта Римана. Вектор  $\mathbf{u}^{in}$  может быть найден решением соответствующих уравнений переноса (4). Остается найти вектор  $\mathbf{v}^{out}$ .

Граничное условие в линейном случае может быть представлено в виде

$$\mathbf{B} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{b}, \tag{7}$$

где  $\mathbf{B}$  – прямоугольная матрица,  $\mathbf{b}$  – известный вектор. Подставив (7) в (6) получим запись граничных условий в общем виде:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}^{in} + \mathbf{\Omega}^{out} \mathbf{v}^{out}) = \mathbf{b}.$$

Отсюда можно выразить вектор  $\mathbf{v}^{out}$ :

$$\mathbf{v}^{out} = -(\mathbf{B} \mathbf{\Omega}^{out})^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{u}^{in} - \mathbf{b}).$$

С учетом найденных выходных значений инвариантов Римана и выражения (6) получим

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{in} - \mathbf{\Omega}^{out} (\mathbf{B} \mathbf{\Omega}^{out})^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{u}^{in} - \mathbf{b}).$$

Рассмотрим несколько вариантов граничных условий. Если на границе задана поверхностная плотность силы воздействия  $\mathbf{f}$ , то на границе выполнено условие  $\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль. В случае свободной границы внешняя сила равна нулю. Корректировка значений в граничных узлах имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{v}^{in} - \frac{1}{\rho c_s} \mathbf{z} + \left( \frac{1}{c_s} - \frac{1}{c_p} \right) (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{T}^{n+1} &= \mathbf{T}^{in} - [\mathbf{z} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{z}] - \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{n}}{\lambda + 2\mu} (\lambda \mathbf{I} - 2(\lambda + \mu)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})), \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{in} \mathbf{n} - \mathbf{f}$ , а  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

Если на границе задана внешняя скорость  $\mathbf{V}$ , то на границе выполнено условие  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ . В случае если скорость нулевая, то граница жестко закреплена. Корректировка значений в граничных узлах имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}^{n+1} &= \mathbf{T}^{\text{in}} - \rho\{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{z})[(c_s - 2c_p - c_3)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + c_3\mathbf{I}] + c_3(\mathbf{n} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{n})\}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{v}^{\text{in}} - \mathbf{V}, \\ c_3 &= \sqrt{\frac{\lambda^2}{\rho(\lambda + 2\mu)}}. \end{aligned}$$

Дополнительно рассмотрим смешанные граничные условия. В таком случае заданы нормальная составляющая скорости и тангенциальная составляющая силы. В случае отсутствия силы трения между телами, тангенциальная составляющая силы равна нулю. Если обозначить тангенциальную составляющую касательных сил через  $\mathbf{f}_\tau$ , а нормальную составляющую скорости через  $V_n$ , то граничные условия можно записать в виде

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_\tau - (\mathbf{f}_\tau \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Корректировка будет осуществляться по формуле (8), в которой

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\tau + [\rho c_p V_n + (\mathbf{T}^{\text{in}}\mathbf{n} - \rho c_p \mathbf{v}^{\text{in}} - \mathbf{f}_\tau)\mathbf{n}]. \quad (9)$$

В случае контакта двух тел производится корректировка соответствующих граничных узлов. В данной работе использовалось условие свободного скольжения. При такой постановке у контактирующих тел совпадают нормальные компоненты скорости на границе, нормальные компоненты силы компенсируют друг друга, и тангенциальные компоненты силы равны нулю. Обозначим контактирующие тела индексами  $a$  и  $b$ , тогда условия контакта можно записать в виде

$$\mathbf{v}_a \mathbf{n} = \mathbf{v}_b \mathbf{n} = V_n, \quad f_p^a = -f_p^b, \quad \mathbf{f}_\tau^a = \mathbf{f}_\tau^b = 0. \quad (10)$$

Тогда из (9) с учетом (10) можно найти силу для корректировки узлов в каждом из тел:

$$\begin{aligned} f_p^a &= \rho c_p V_p + (\mathbf{T}_a^{\text{in}}\mathbf{n} - \rho c_p \mathbf{v}_a^{\text{in}})\mathbf{n}, \quad f_p^b = \rho c_p V_p + (-\mathbf{T}_b^{\text{in}}\mathbf{n} - \rho c_p \mathbf{v}_b^{\text{in}})\mathbf{n}, \\ V_p &= \frac{1}{2}[\mathbf{v}_a^{\text{in}} + \mathbf{v}_b^{\text{in}} - \frac{1}{\rho c_p}(\mathbf{T}_a^{\text{in}} - \mathbf{T}_b^{\text{in}})\mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (11)$$

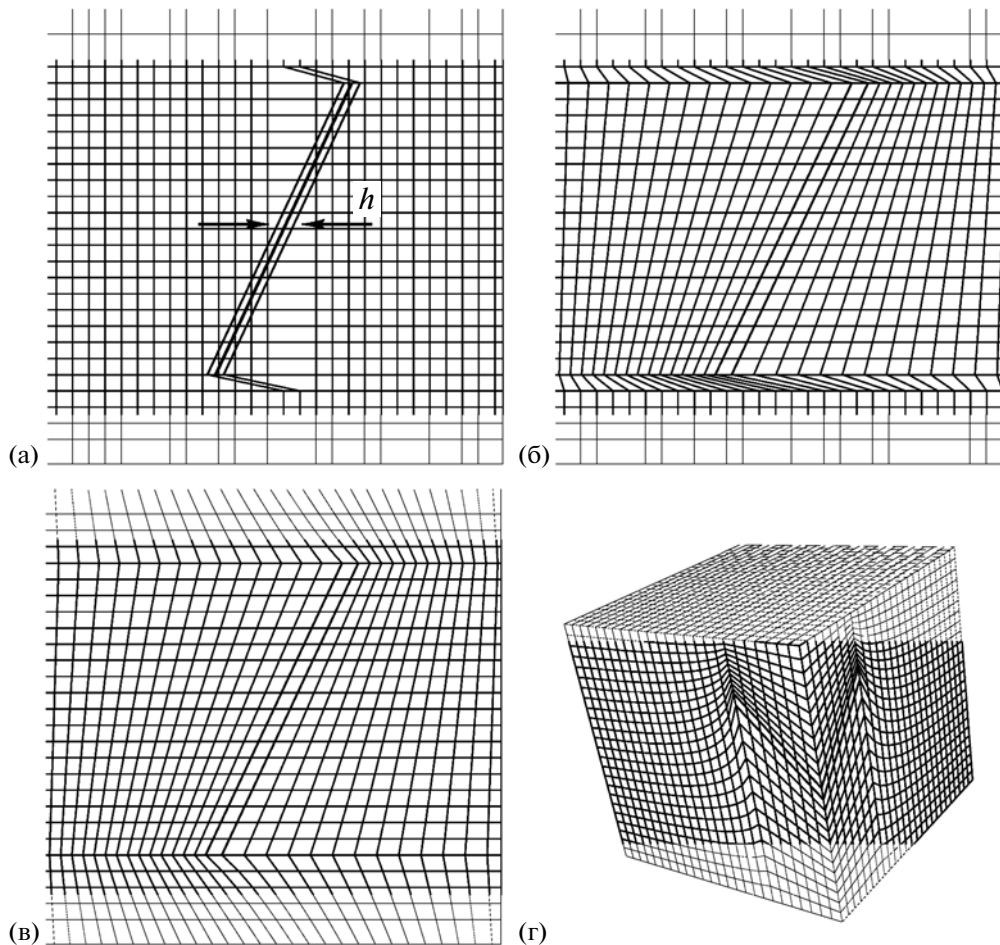
Модель бесконечно тонкой трещины представляет собой набор узлов из двух соседних рядов расчетной сетки. Рассмотрим, для наглядности, двумерный случай. На начальном этапе производится построение прямоугольной расчетной сетки во всей области интегрирования. Если плоскость моделируемой трещины вертикальна или горизонтальна, то в отдельную структуру сохраняются индексы узлов, принадлежащих каждому из ее бортов. В случае наклонной трещины дополнительно производится корректировка сетки. Индексы узлов, наиболее близких к центру трещины, но находящихся слева и справа от нее, полагаются определяющими ее борта. После этого все узлы с данными индексами сдвигаются на границу трещины (см фиг. 1,а) и их координаты фиксируются. Для устранения сильного сгущения сетки, возникающего вблизи трещины, производятся две последовательные корректировки. Во-первых, узлы, попадающие в полосу трещины, расставляются равномерно в пределах интервалов “граница трещины–граница области” и “граница трещины–граница соседней трещины” (фиг. 1,б). Во-вторых, по формуле

$$\mathbf{x}_{i,j} = \frac{\mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{i-1,j} + \mathbf{x}_{i,j+1} + \mathbf{x}_{i,j-1}}{4}$$

проводится несколько итераций Якоби (см. [26]) для всех узлов, не попадающих в один ряд с границами (верхней и нижней) трещины (фиг. 1,в). В трехмерном случае корректировки расчетной сетки полностью аналогичны, а используемая формула принимает вид

$$\mathbf{x}_{i,j,k} = \frac{\mathbf{x}_{i+1,j,k} + \mathbf{x}_{i-1,j,k} + \mathbf{x}_{i,j+1,k} + \mathbf{x}_{i,j-1,k} + \mathbf{x}_{i,j,k+1} + \mathbf{x}_{i,j,k-1}}{6}.$$

Финальная расчетная сетка для кубической области, содержащей одну наклонную трещину, приведена на фиг. 1г.



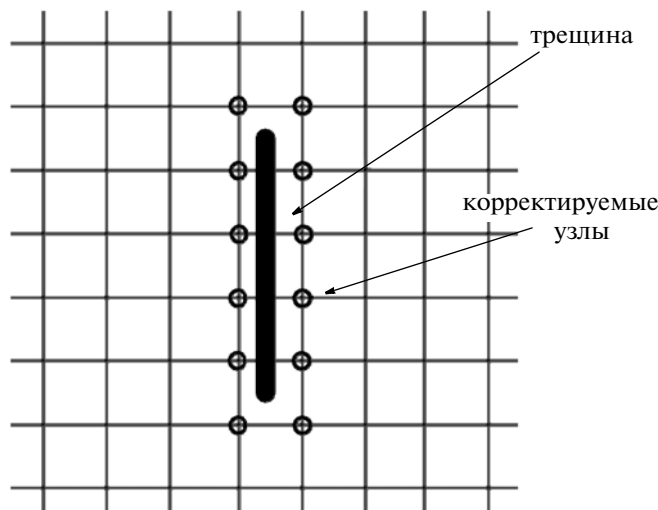
**Фиг. 1.** Расположение узлов расчетной сетки при наличии одной наклонной трещины в двумерном (а), (б) и трехмерном случае (г). Жирным выделены узлы, принадлежащие ее бортам.

На каждом временном шаге при расчете одного шага расщепления по координатам в узлах, лежащих на бортах трещины, производится корректировка значений. Если граница трещины проходит вдоль текущего направления расщепления, то точки борта считаются по тем же формулам, что и внутренние точки области. Если нет, то в них применяются граничные корректоры. В зависимости от типа заполнителя (отсутствие или флюид) дополнительно на границах трещины (фиг. 2) после расчета значений во всех внутренних точках используется либо условие свободной границы (8), либо условие контакта со скольжением (11) соответственно.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЗАДАЧ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

С использованием описанного метода расчета динамических процессов в трещиноватых средах был проведен расчет взаимодействия продольной упругой волны с наклонной трещиной в двумерной постановке. Область интегрирования представляла собой квадрат  $100 \times 100$  м. В качестве начального возмущения использовалась  $P$ -волна, распространяющаяся вертикально вниз, имеющая ширину фронта 3 м. Расчетная сетка, в которой выделялась трещина протяженностью 50 м, наклоненная под углом  $28^\circ$  к оси  $OX$ , содержала  $10^6$  узлов. Задавались следующие упругие характеристики среды: 3000 м/с — скорость продольных волн, скорость поперечных волн — 1400 м/с,  $2500 \text{ кг/м}^3$  — плотность. Волновые картины в последовательные моменты времени (7 мс, 14 мс и 24 мс после начала расчета) для обоих типов заполнителя приведены на фиг. 3.

Анализ результатов расчетов показывает, что сейсмический отклик от трещины вне зависимости от заполнителя состоит, как из продольной упругой волны, распространяющейся с большей скоростью, так и поперечной упругой волны. При этом в случае отсутствия заполнителя обе со-



Фиг. 2. Схема явного учета граничных условий на бортах трещины.

ставляющие имеют примерно одинаковую интенсивность, тогда как в случае флюидонасыщения интенсивность продольной волны значительно ниже.

Отметим, что за пустой трещиной образуется область тени, в которую не проникает падающая волна. Таким образом, вблизи трещины происходит разрыв волнового фронта, который, однако, исчезает на некотором удалении от нее. От нижней границы флюидонасыщенной трещины инициируется дополнительная поперечная волна, распространяющаяся дальше в глубь породы. От углов пустой трещины начинают распространяться сферические волны, проходящие вдоль обоих ее бортов. В случае флюидонасыщенной трещины также наблюдается распространение поверхностных волн на границе трещина–порода, однако обладающих значительно меньшей интенсивностью и не сферической структурой.

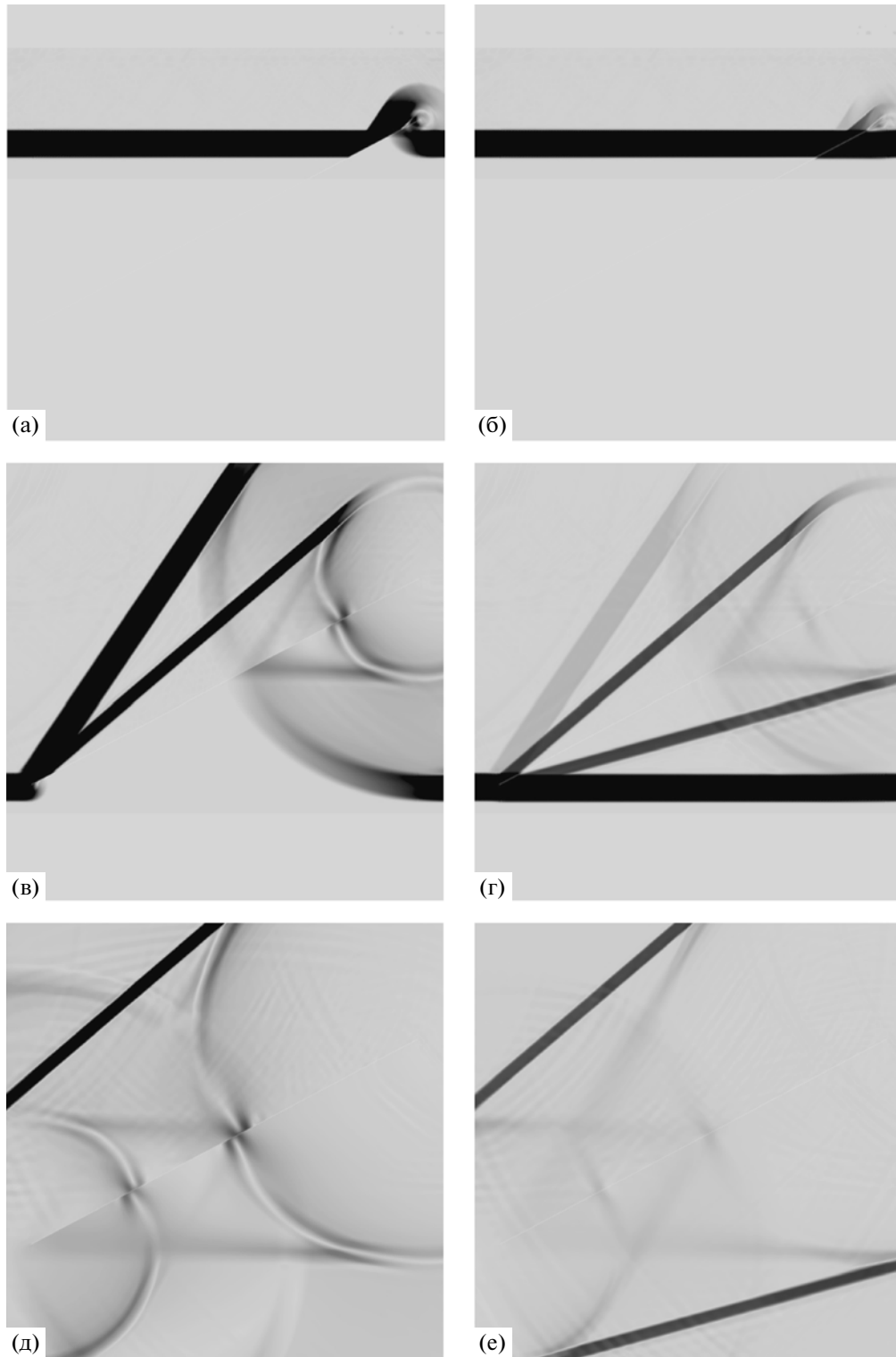
Таким образом, результаты численных расчетов в двумерной постановке могут быть использованы для детального анализа волновых процессов вблизи геологических трещин и выяснения природы возникновения сейсмического отклика от трещиноватых сред произвольной структуры.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЗАДАЧ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

С использованием описанного численного метода для моделирования динамических процессов в трещиноватых средах в работе был рассчитан сейсмический отклик от кластера пустых и флюидонасыщенных трещин.

Для описания вертикальных трещин использовалась параллелепипедная расчетная сетка. Моделировался кластер из 31 параллельной трещины, протяженностью 3000 м и высотой 100 м, расположенных на расстоянии 100 м друг от друга. Он находился на глубине 2000 м от дневной поверхности. Вмещающий массив представлял собой параллелепипед ( $10 \times 10 \times 3$  км) со следующими упругими характеристиками: 4500 м/с – скорость продольных волн, 2250 м/с – скорость поперечных волн,  $2500 \text{ кг/м}^3$  – плотность среды (см. фиг. 4). В качестве источника возмущения использовалась продольная упругая волна, распространяющаяся от дневной поверхности под углом  $5^\circ$  к вертикали в плоскости  $OXZ$ .

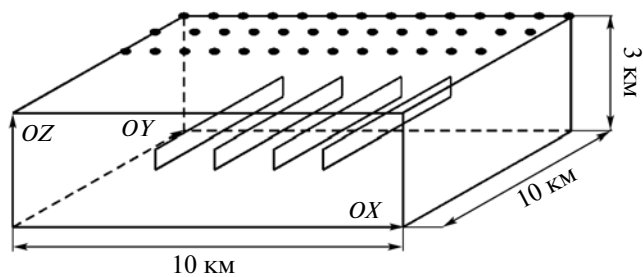
В ходе численного расчета производится вычисление полного вектора скорости и тензора напряжения в последовательные моменты времени в каждом узле расчетной сетки, что позволяет визуализировать волновую картину вдоль произвольного сечения области (см. фиг. 5). Необходимо отметить, однако, что при проведении полевых измерений имеется возможность регистрации лишь колебаний дневной поверхности. В ходе расчета на верхней границе параллелепипеда производилась запись полного вектора скорости в местах расстановки сейсмоприемников. Расстановка представляла собой площадное покрытие в виде квадратной сетки с шагом 50 м и осями, параллельными  $OX$  и  $OY$ .



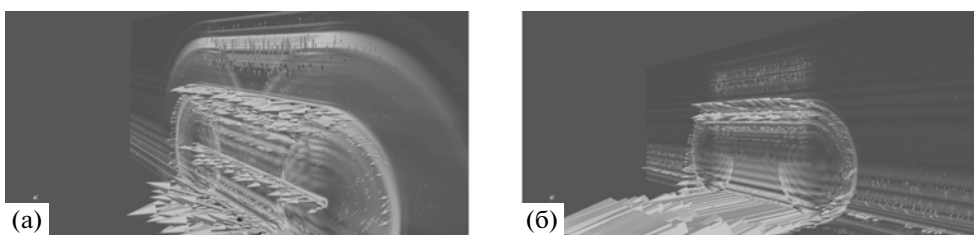
**Фиг. 3.** Взаимодействие продольной волны с наклонной трещиной в случае пустой трещины (слева) и флюидонасыщения (справа).

Шаг сетки составлял 5 м вдоль оси  $OZ$  и 10 м вдоль осей  $OX$  и  $OY$ , и она содержала 600 миллионов узлов. Запуск программы производился на вычислительной системе с 30 расчетными ядрами. Поскольку при таком объеме вычислений, несмотря на параллельность алгоритма, одно вы-

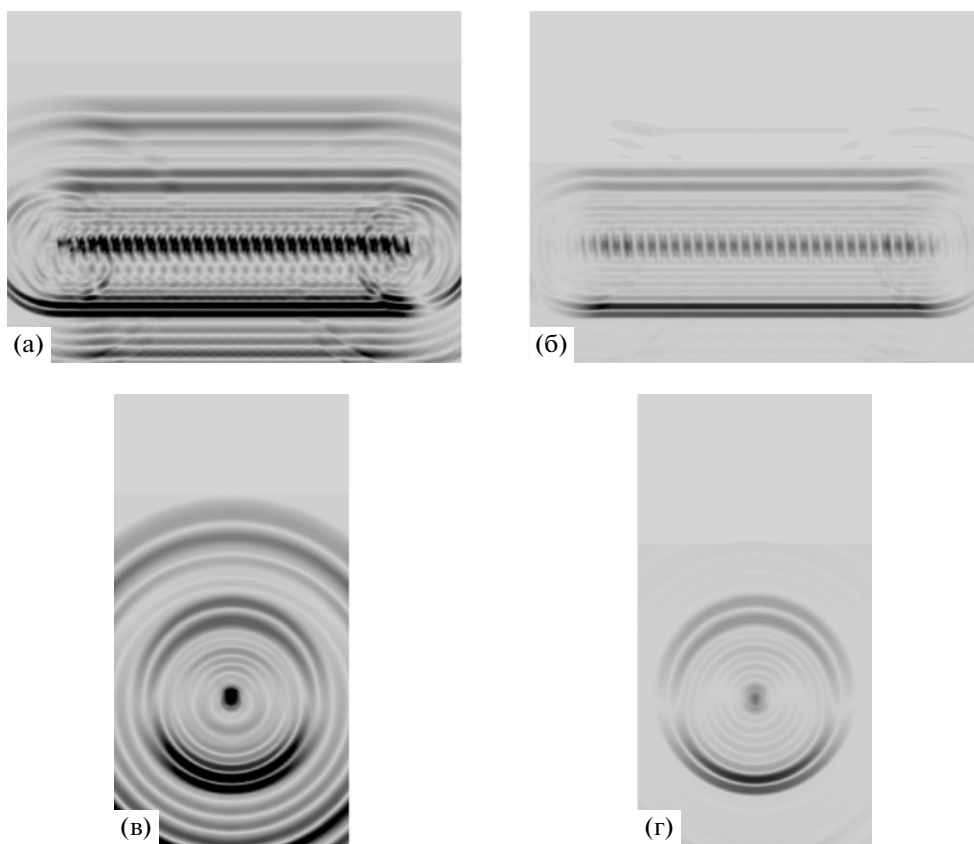




Фиг. 4. Геометрия расчетной области в задаче о кластере вертикальных трещин.



Фиг. 5. Сечение расчетной области плоскостью  $OYZ$ . Насыщение вертикальных трещин: пустота (слева) и флюид (справа). Модуль скорости в градации серого цвета и вектор скорости.



Фиг. 6. Сечение расчетной области плоскостью  $OYZ$  (снизу) и  $OXZ$  (сверху). Насыщение наклонных трещин: пустота (слева) и флюид (справа). Модуль скорости в градации серого цвета и вектор скорости.

полнение программы занимало примерно сутки, было решено задавать заглубленное начальное возмущение на расстоянии 1700 м от дневной поверхности (над кластером).

Анализ результатов численных расчетов позволяет установить следующие особенности динамических процессов, происходящих в трехмерной трещиноватой среде. Вне зависимости от вида насыщения трещин происходит формирование, как продольных сейсмических волн отклика, так и поперечных волн. Одной из интересных особенностей процесса является генерация периодического “шлейфа” упругих колебаний, сопровождающего основные фазы отклика и, по-видимому, вызванного межтрещинным взаимодействием. По всей ширине кластера инициируется плоский волновой фронт, а от его краев начинают распространяться сферические волны. При этом при насыщении трещин флюидом интенсивность проходящего через трещиноватый кластер возмущения намного выше, чем при отсутствии заполнителя.

Также был проведен расчет сейсмического отклика от кластера субвертикальных трещин. Кластер содержал 31 круглую бесконечно тонкую параллельную трещину диаметром 48 м, наклоненную под углом 10 градусов к вертикали в плоскости  $OXZ$  и расположенную на расстоянии 48 м друг от друга. Он находился на глубине 960 м от дневной поверхности. Геологический вмещающий массив представлял собой параллелепипед ( $2880 \times 720 \times 1440$  м) с теми же упругими характеристиками, которые использовались в расчете с вертикальными трещинами. В качестве источника возмущения использовалась продольная упругая волна, распространяющаяся вертикально вниз вдоль оси  $OZ$ , имеющая ширину фронта 70 м. Шаг сетки составлял 8 м вдоль оси  $OX$  и 4 м вдоль осей  $OY$  и  $OZ$ , и она содержала 24 миллиона узлов (см. фиг. 6).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Massau J.* Memoire sur l'integration graphique aux derives partielles. F.: Meyer-van Loo, 1899. 190 p.
2. *Жуков А.И.* Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. МИАН СССР. 1960. № 58. С. 4–150.
3. *Butler D.S.* The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations of three independent variables // Proc. Roy. Soc. London A. 1960. V. 255. № 1281. P. 232–241.
4. *Магомедов К.М.* Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 2. С. 313–325.
5. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 2. С. 383–396.
6. *Кукуджанов В.Н.* Численное решение не одномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах // Сообщения по прикл. матем. ВЦ АН СССР. 1976. Вып. 6. С. 11–37.
7. *Шевелев Ю.Д.* Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. М.: Наука, 1986.
8. *Холодов А.С.* Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа. Энциклопедия низкотемпературной плазмы (серия “В”). Т. VII-1, Ч. 2. Математическое моделирование низкотемпературной плазмы. М.: ЯНУС-К, 2008. С. 141–174.
9. *Fridrichs K.O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // IBID. 1954. № 2. P. 345–392.
10. *Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1476–1492.
11. *Федоренко Р.П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1122–1128.
12. *Петров И.Б., Холодов А.С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 8. С. 1172–1188.
13. *Холодов А.С.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1601–1620.
14. *Холодов А.С., Холодов Я.А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667.
15. *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. Вып. 5. С. 722–739.
16. *Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н.* Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластических сред с конечными деформациями // Сб. по числ. методам в механ. деформируемого твердого тела. 1978. С. 84–122.
17. *Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С.* Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 8. С. 1237–1244.

18. *Петров И.Б., Тормасов А.Г.* О численном исследовании трехмерных задач обтекания волнами сжатия препятствия или полости в упругопластическом полупространстве // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 4. С. 817–820.
19. *Иванов В.Д., Петров И.Б., Суворова Ю.В.* Расчет волновых процессов в наследственных вязкоупругих средах // Механ. композитных материалов. 1990. № 3. С. 447–450.
20. *Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С.* О численном изучении нестационарных процессов в деформируемых средах многослойной структуры // Известия АН СССР. Серия МТТ. 1989. № 4. С. 89–95.
21. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 10. С. 1709–1720.
22. *Петров И.Б., Фаворская А.В., Санников А.В., Квасов И.Е.* Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяции высоких порядков на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 2. С. 42–52.
23. *Левянт В.Б., Петров И.Б., Челноков В.Б.* О природе отклика рассеянной сейсмической энергии от зоны диффузной кавернозности и трещиноватости в массивных породах // Геофизика. 2005. № 6. С. 5–19.
24. *Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С.* Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 10–29.
25. *Петров И.Б., Челноков Ф.Б.* Численное исследование волновых процессов и процессов разрушения в многослойных преградах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 10. С. 1562–1579.
26. *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W.* Numerical grid generation. New York: Elsevier, 1985. 327 p.