

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

РАСЧЕТ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

© 2009 г. *И.Е. Квасов, И.Б. Петров, Ф.В. Челноков*

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Целью данной работы является исследование характера отраженного волнового фронта, обусловленного рассеянием упругой энергии от каверзных и трещиноватых зон в массивных породах. Получены численные решения пространственных задач о распространении упругих волн вблизи неоднородностей, характерных для рассматриваемых пород (трещины и каверны), а также в жилищных и промышленных сооружениях, имеющих существенные неоднородности (внутренние полости – комнаты).

В работе используется сеточно-характеристический метод с постановкой граничных условий на поверхности раздела между породой и каверной (трещиной), а также на свободных поверхностях в явном виде. Предлагаемый численный метод имеет большую общность и пригоден для исследования процессов обтекания сейсмическими волнами макроскопических преград, когда эффектами экранирования и дифракции пренебрегать нельзя.

COMPUTATION OF WAVE PROCESSES IN NONUNIFORM 3D CONSTRUCTIONS

I.E. Kvasov, I.B. Petrov, F.V. Chelchokov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

The purpose of the given article is research of character of the return wavefront caused by dispersion of elastic energy from cavity and crack zones in massive rocks. Numerical solutions of elastic wave transmission close to nonuniformities (cavities and cracks, characteristic for considered rocks) and also in housing and industrial constructions having essential nonuniformities (internal cavities – rooms) have been obtained.

Grid-characteristic method with formulation of boundary conditions on an interface between rock and cavity (or crack), and also on free surfaces in an explicit form is used in this article. The offered numerical method has a great generality and is suitable for research of processes of a flow about macroscopical barriers by seismic waves when it is impossible to neglect effects of shielding and diffraction.

Постановка задачи

Общий вид исследуемой области показан на рис.1. С дневной поверхности излучается плоская волна, например, сигнал Берлаге. В эллиптической (или близкой к эллиптической) области располагаются каверны и трещины, возможно, заполненные жидкостью. Одной из основных задач является анализ характера отраженной волны в трехмерной постановке задачи и сравнение этих результатов с полученными ранее для двумерной задачи. В этой работе предлагается исследование прохождения упругой волны вблизи трещин.

Кроме того, в работе предлагается исследование распространения упругих волн в жилищных конструкциях, моделируемых кубической областью с равномерной периодической структурой кубических полостей (рис.2). В центре одной из боковых граней происходит взрыв. Изучается прохождение упругой волны через здание, в частности, подробно рассматриваются эффекты, возникающие при достижении упругой волной волной противоположной грани (эффект тыльного откола). Распространение волн в таких конструкциях существенно отличается от распространения волн в однородной среде. На рис.2 видно, что в перфорированной среде фронт возмущения при-

обретает форму, отличную от сферической (клинообразную). Если бы воздействие было точечным, а количество кубических полостей стремилось к бесконечности, то геометрическое место точек, до которых только что дошло возмущение, имело бы форму правильного клина с четырьмя плоскими гранями. Заметим, что форма волнового фронта существенно зависит от положения начального возмущения. Так, если бы взрыв произошел в угловой точке здания, то волновой фронт был бы близок к сферическому (рис.3).

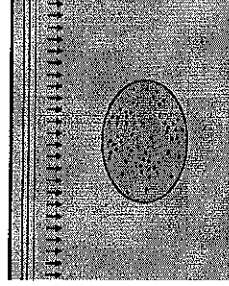


Рис.1.

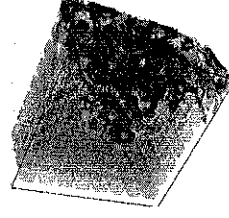


Рис.2.

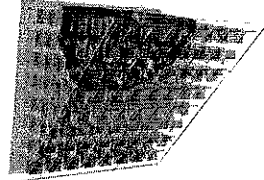
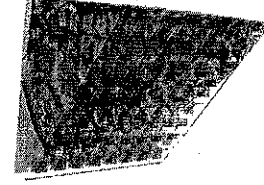


Рис.3.



Математическая модель

Сформулируем здесь уравнения, которым подчиняется состояние бесконечно малого объема сплошной линейно-упругой среды [1]. Во-первых, это локальное уравнение движения:

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

Здесь ρ – плотность материала, \mathbf{u} – скорость движения среды в данной точке, ∇ – градиент по пространственным координатам, \mathbf{T} – тензор напряжений Коши.

Введем симметричный тензор малых деформаций

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla),$$

где \mathbf{u} – поле перемещений ($\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$), \otimes – оператор тензорного произведения: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$. В произведении $(\mathbf{u} \otimes \nabla)$ дифференцирование также подвергается \mathbf{u} , а не последующие сомножители:

$$(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla)_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i.$$

Линейная упругость материала подразумевает следующую связь напряжений с деформациями:

$$\mathbf{T} = \lambda(\mathbf{e} : \mathbf{I}) + 2\mu \mathbf{e},$$

где λ , μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала (существуют взаимно-однозначные формулы связи параметров Ляме с одной стороны, и модуля Юнга и коэффициента Пуассона с другой), \mathbf{I} – единичный тензор, $:$ – двойная свертка:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

Чтобы получить замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно скоростей и напряжений, остается только продифференцировать связь напряжений с деформациями

$$\begin{cases} \rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \dot{\mathbf{T}} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla). \end{cases}$$

Каноническая запись дифференциальных уравнений

В вычислительной математике для анализа системы уравнений и построения разностных схем для нее принято приводить ее запись к канонической форме:

$$\dot{\mathbf{u}} + \sum_j \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} = 0,$$

где в вектор \mathbf{u} собираются все переменные системы, в нашем случае это

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{v}, \mathbf{T}\}^T = \{v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}^T.$$

В запись разностных схем входит как сама матрица \mathbf{A}_j , так и различные функции от нее. Чтобы иметь возможность в явном виде вычислять разностные схемы, исключая процедуры, например, обращения матрицы и приближенного вычисления ее собственных величин, приведем здесь явную запись матриц \mathbf{A}_j и их спектрального разложения, полученную в [2].

Введем ряд обозначений, принятых в [2]. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — произвольный базис косогоугольной системы координат. Чаще всего направления осей выбираются в зависимости от локальной конфигурации узлов сетки, исходя из координат, ближайших к данному узлу. Обозначим

$$\mathbf{q}_j \equiv \frac{\partial \xi_j}{\partial \mathbf{x}},$$

где (x_1, x_2, x_3) — некоторая фиксированная декартова система координат. Таким образом, $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ является биортогональным базисом по отношению к (ξ_1, ξ_2, ξ_3) :

$$\mathbf{q}_1 = \frac{[\xi_2, \xi_3]}{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{[\xi_3, \xi_1]}{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{[\xi_1, \xi_2]}{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)},$$

здесь в числителе стоит векторное произведение векторов, а в знаменателе — смешанное. С каждым из векторов \mathbf{q}_j свяжем ортонормированный базис $(\mathbf{n}_{j,0}, \mathbf{n}_{j,1}, \mathbf{n}_{j,2})$, в котором $\mathbf{n}_{j,0}$ сонаправлен с \mathbf{q}_j :

$$\mathbf{n}_{j,0} = \frac{\mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_j\|}, \quad \mathbf{t}_j = \|\mathbf{q}_j\|,$$

а единичные вектора $\mathbf{n}_{j,1}, \mathbf{n}_{j,2}$ выбираются произвольно. Далее, если это можно восстановить из контекста, будем опускать первый индекс j , а в $\mathbf{n}_{j,0}$ — второй индекс 0. Кроме того, определим симметричные матрицы $\mathbf{N}_{ij} = \mathbf{N}_{ji}$ как

$$\mathbf{N}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_i), \quad i, j = 0, 1, 2.$$

И, наконец, введем обозначения $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — продольная скорость звука в упругом материале, $c_2 = \sqrt{\lambda/\rho}$ — поперечная скорость звука.

Итак, выделим явный вид матрицы A и ее спектрального разложения $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$, где $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_j \}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы A :

$$A_j \begin{bmatrix} v \\ T \end{bmatrix} = -I_j \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{T}) \\ \lambda (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}_j) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \{ \text{diag} \{ c_1, -c_1, c_2, -c_2, c_2, -c_2, 0, 0, 0 \} \},$$

$$\Omega \begin{bmatrix} v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{c_1 \rho} N_{00} : \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c_1 \rho} N_{00} : \mathbf{T} \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{c_2 \rho} N_{01} : \mathbf{T} \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c_2 \rho} N_{01} : \mathbf{T} \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{c_2 \rho} N_{02} : \mathbf{T} \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c_2 \rho} N_{02} : \mathbf{T} \\ N_{12} : \mathbf{T} \\ (N_{11} - N_{22}) : \mathbf{T} \\ (N_{11} + N_{22} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} N_{00}) : \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1 \mathbf{T}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{n} & -\rho [(c_1 - c_2) N_{00} + c_3 \mathbf{I}] \\ \mathbf{n} & \rho [(c_1 - c_2) N_{00} + c_3 \mathbf{I}] \\ \mathbf{n}_1 & -2c_2 \rho N_{01} \\ \mathbf{n}_1 & 2c_2 \rho N_{01} \\ \mathbf{n}_2 & -2c_2 \rho N_{02} \\ \mathbf{n}_2 & 2c_2 \rho N_{02} \\ 0 & 4N_{12} \\ 0 & N_{11} - N_{22} \\ 0 & \mathbf{I} - N_{00} \end{bmatrix}$$

Численный метод

Для численного решения задачи используется сеточно-характеристический метод [4-6], учитывающий указанные физические особенности задачи, т.е. распространение разрывов вдоль характеристических поверхностей, и позволяющий строить корректные численные алгоритмы для расчета граничных точек и точек, лежащих на поверхностях раздела сред.

Видно, что система уравнений при замене переменных на самом деле распадается на ряд независимых скалярных уравнений переноса

$$\dot{\mathbf{v}} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} = 0 \quad (\mathbf{v} \equiv \Omega \mathbf{u}).$$

Одномерные уравнения переноса решаются весьма просто (рис.4). Из того узла m временного слоя $n+1$, в котором требуется получить решение, опускаются характеристики. Из точки пересечения характеристики со слоем n соответствующая компонента вектора \mathbf{v} переносится в точку ξ_m^{n+1} :

$$v_i^{n+1}(\xi_m) = v_i^n(\xi_m - \lambda_i \tau).$$

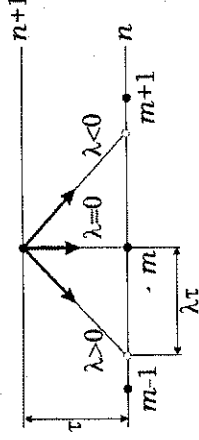


Рис.4

Если характеристика не попадает точно в расчетный узел, то применяются те или иные способы реконструкции решения в данной точке (обычно интерполяция). Выбор способа реконструкции на предыдущем слое обуславливает степень аппроксимации сеточно-характеристической разностной схемы. В [3] приводится вывод сеточно-характеристических схем первого (Кургант-Изаксона-Риса) и второго (Лака-Вендорфа) порядков.

После того как все компоненты \mathbf{v} перенесены, восстанавливается само решение

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{v}^{n+1}.$$

В некоторых программных реализациях сеточно-характеристического метода непосредственно производится обращение матрицы или эквивалентное решение системы линейных уравнений. В [2] предложен другой подход, использующий явное представление матрицы \mathbf{A} и ее спектрального разложения. Приведем здесь лишь конечный результат

$$\mathbf{u}^{n+1}(\xi_m) = \mathbf{u}^n(\xi_m) + \sum_{\lambda_i \neq 0} \mathbf{X}^i \left[\mathbf{u}^n(\xi_m - \lambda_i \tau) - \mathbf{u}^n(\xi_m) \right],$$

где суммирование производится по всем ненулевым собственным значениям матрицы \mathbf{A} , а матрицы $\mathbf{X}^{\pm c_1}$, $\mathbf{X}^{\pm c_2}$ выглядят следующим образом:

$$\mathbf{X}^{\pm c_1} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \mp \frac{1}{c_1\rho}(\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T})\mathbf{n} \\ \mp \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})[(c_1 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}] + \frac{\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00}}{\lambda + 2\mu}(\lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^{\pm c_2} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \mp \frac{1}{c_2\rho}[\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T})\mathbf{n}] \\ \mp c_2\rho[\mathbf{n} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{N}_{00}] + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) - 2(\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})\mathbf{N}_{00} \end{bmatrix}$$

Граничные условия

На внешних границах области интегрирования ставились граничные условия полного поглощения; на границе каверн и трещин – условия свободной границы:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} = 0,$$

где \mathbf{p} определяет перпендикуляр (единичной длины) к поверхности тела $\mathbf{p} = \mp \mathbf{n}$, знак минус относится к левой, а плюс – к правой границе тела.

Учитывая явную запись спектрального разложения матриц \mathbf{A}_r , выпишем формулу расчета граничных узлов для случая свободной границы, выведенную в [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \mathbf{T}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^n \\ \mathbf{T}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\rho c_2} \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n} \mp \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) (\mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ - \left[(\mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n}) \right] - \frac{\mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}{\lambda + 2\mu} (\lambda \mathbf{I} - 2(\lambda + \mu)\mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix},$$

где, напомним, верхний знак относится к левой, а нижний – к правой границе области интегрирования. Здесь $\mathbf{u}^n(\xi_m) = \sum_{\lambda_i \in \lambda^n} \mathbf{X}^i \mathbf{u}^n(\xi_m - \lambda_i \tau)$ – часть, отвечающая характеристикам, попавшим внутрь области интегрирования.

Результаты численного решения

В работе рассматривается пространственная задача отражения плоской волны от трещины в массивной породе. Для численного моделирования поставленной задачи использовалась сеточно-характеристический метод. В области интегрирования использовалась кубическая расчетная сетка. Максимальное количество узлов сетки составляет 27 млн., т.е. 300 узлов по каждому из трех измерений. Параметры упругого материала в данной модельной задаче принимались следующие:

$$\lambda = \mu = 1, \quad \rho = 1.$$

Расчеты велись в предположении малых деформаций, поэтому координаты узлов не хранились, а вычислялись из сеточных параметров: (ih, jh, kh) .

На рис.5 представлено воздействие падающей волны на наклонную трещину (показано сечение плоскостью, перпендикулярной трещине). Пустая трещина полностью отражает падающую волну, которая распадается на продольную и поперечную волны, движущиеся в нескольких различных направлениях. Через некоторое время исходящая волна в результате дифракции восстанавливает свой фронт.

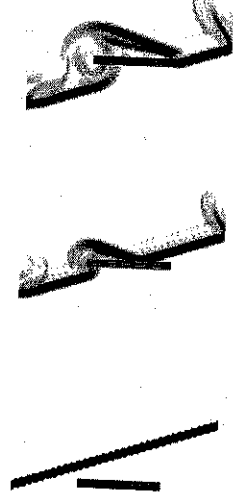


Рис.5.

Проведенные численные исследования в трехмерной постановке задачи позволяют сделать вывод, что расчеты в двумерном варианте в целом давали правильное качественное решение. Однако интегральная картина, которая получается в результате многократных отражений волн от большого количества каверн и трещин, может заметно отличаться в пространственной задаче. Этот вопрос является результатом дальнейших исследований.

Далее рассматривалась задача о воздействии динамических нагрузок на жилой дом, представляющий собой куб с регулярной структурой внутренних полостей (комнатами).

На рис.6 представлены результаты расчета задачи о распространении волн в рассматриваемой конструкции при воздействии с левой стороны ударной нагрузки. Упругая волна сжата, вращается вблизи этой границы в волну растяжения, что приводит к явлению тыльного откола.

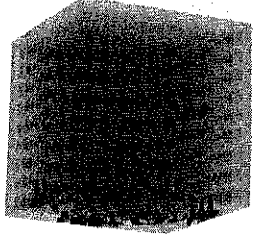


Рис.6а.

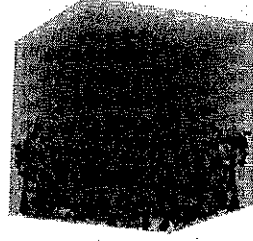


Рис.6б.

На рис. 7 представлены результаты расчета задачи врыва в центре перфорированного тела. Как видим, фронт волны приобретает кубическую форму, в отличие от однородного тела, где фронт имел бы сферическую форму. Напомним, что этот эффект связан с различием в скоростях распространения возмущения вдоль банок (по направлению осей координат) и по другим направлениям.

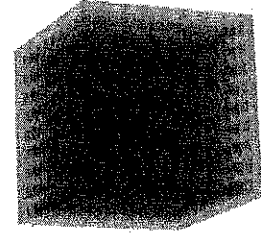


Рис. 7а.

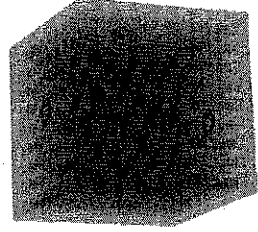


Рис. 7б.

На рис. 8а, 8б, 8с представлены результаты расчета задачи дифракции сферической волны на кубической полости (показано сечение центральной плоскостью). На рис. 8б видно формирование отраженной от передней грани полости волны. На рис. 8с показан момент, когда фронт прошедшей волны практически полностью восстановил первоначальную сферическую форму, обогнув препятствие — полость.

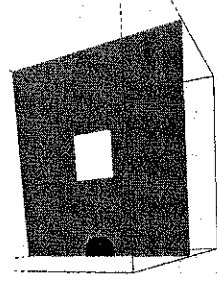


Рис. 8а.

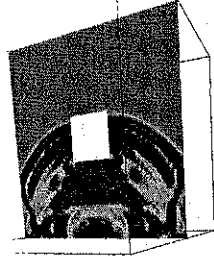


Рис. 8б.

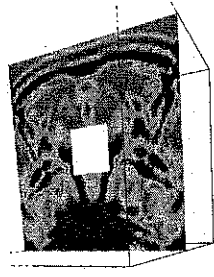


Рис. 8с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Кондауров, В.Е. Фортюв. Основы термомеханики конденсированной среды. — М.: МФТИ, 2002.
2. В.Д. Иванов, В.Н. Кондауров, А.С. Холодов. Расчет динамического деформирования и разрушения упругоэластических тел сеточно-характеристическими методами / Матем. моделирование, 2003, т.15, №10.
3. К.М. Магомедов, А.С. Холодов. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений / ЖВМ и МФ, 1969, т.9, №2, с.373–386.
4. И.Б. Петров, А.С. Холодов. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформированного твердого тела сеточно-характеристическим методом / ЖВМ и МФ, 1984, т.24, №5, с.722–739.
5. К.М. Магомедов, А.С. Холодов. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
6. И.Б. Петров, Ф.Б. Челюков, В.В. Чибриков. Расчет волновых процессов и процессов разрушения в пористых средах // Сб. научных трудов «Обработка информации и моделирование». — М.: МФТИ, 2002, с.137–147.

Поступила в редакцию 31.10.07