



ISSN 617.741-004.1, 519.635.8

М. С. Богомолова, И. Б. Петров

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГЛАЗУ ПРИ ЛАЗЕРНОЙ ЭКСТРАКЦИИ КАТАРАКТЫ

Численно решается задача о поведении силовой биосреды глаза во время операционного воздействия излучением маломощного лазера с целью удаления катаракты.

The article presents a numeric approach to the problem of eye biomedium reaction during the procedure of surgeon cataract extraction by a low-powered laser radiation.

Введение

В настоящее время одним из самых актуальных и перспективных направлений в научных исследованиях является численное изучение физиологических, патологических и биологических процессов, происходящих в организме человека. На сегодняшний день медицина представляет собой экспериментальную науку, которая на основе констатации фактов клинических операций может рекомендовать различные средства для снижения патологических процессов. Поэтому построение математических моделей — как патологического, так и нормального функционирования тех или иных органов — необходимо для изучения процессов, протекающих в организме, также важное значение имеет моделирование последствий хирургических операций. Моделирование таких процессов помогает лучше изучить последствия хирургических вмешательств и минимизировать возможные осложнения. Представление о строении биосред и физиологии процессов строится в основном по книгам [6; 7].

Описание исследуемых физиологических, патологических и операционных процессов

Хрусталик — это прозрачная линза, расположенная непосредственно за зрачком. Заболевание, при котором возникает помутнение хрусталика, называется катарактой. Потеря прозрачности хрусталика препятствует проникновению лучей света внутрь глаза, зрение человека ухудшается. Если ничего не предпринимать, катаракта может привести к слепоте.

Причинами этого заболевания могут стать различные факторы: травма, нарушение питания тканей глаза, связанное с возрастом, лучевое

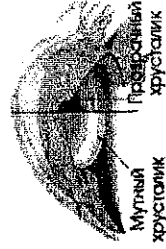


Рис. 1. Мутный и прозрачный хрусталик

Модель глаза

Оптическая система глаза (рис. 6) представляет собой точно центрированную сложную систему линз, формирующую на сетчатке перевернутое и уменьшенное изображение внешнего мира. Диоптрический аппарат состоит из прозрачной роговицы, передней и задней камер, заполненных водянистой влагой, радужной оболочкой, окружающей зрачок, хрусталика, окруженного прозрачной сумкой, и стекловидного тела, занимающего большую часть глазного яблока. Стекловидное тело — прозрачный гель, состоящий из внеклеточной жидкости с коллагеном и гиалуроновой кислотой в коллоидном растворе. В задней части глаза его внутренняя поверхность выстлана сетчаткой. Промежуток между сетчаткой и плотной склерой, окружающей глазное яблоко, заполнен сетью кровеносных сосудов — сосудистой оболочкой. У заднего полюса глаза человека в сетчатке есть небольшое углубление — центральная ямка — место, где острота зрения при дневном освещении максимальна. Диаметр глаза — 2,5 см, толщина хрусталика — 4 мм, расстояние от роговицы до хрусталика — 6 мм. Поведение элементов глазоупругой модели с использованием линейно-упругой либо вязко-упругой модели с выделением в ней четырех различных материалов: склеры, хрусталика, стекловидного тела и роговицы. На границах поставлены условия отсутствия нормальных напряжений.

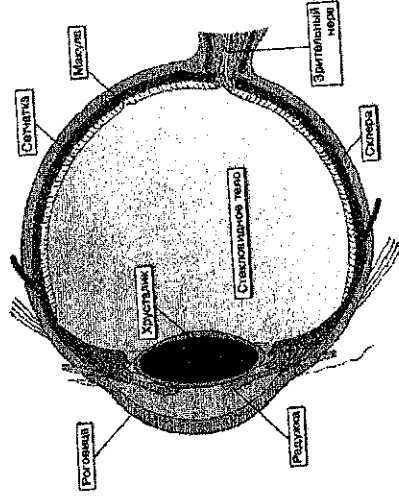


Рис. 6. Схема строения глаза человека

Математическая модель деформируемой биосреды

Под углом 60° к оптической оси глаза вводится световод, по которому в хрусталик передается лазерное излучение. Интенсивность поглощаемого излучения рассчитывается по закону Ламберта — Бера:

$$Q(r, h) = I(r)e^{-h/r}, \quad I(r) = I_0 e^{-(r/R)^2},$$

где r — радиус облучаемой зоны, h — вертикальная координата, H — глубина поглощения ($H = 3,2$ мм), I_0 — интенсивность в центре световода, R — диаметр световода ($R = 0,3$ мм).

Полная энергия излучения считалась равной 250 мДж.

$$\rho \dot{v}_i - \nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\gamma \delta_{ij}}{\rho c} Q - \tau_0, \quad (2)$$

воздействие, диабет, некоторые глазные заболевания или наследственные особенности организма человека. Чаще всего катаракта развивается в процессе старения организма, который приводит к увеличению плотности хрусталика и его помутнению. Единственным способом лечения катаракты является хирургическое удаление мутного хрусталика.

Различают интракапсулярную и экстракапсулярную методики удаления катаракты. При первой хрусталик удаляют вместе с капсулой, в которой он находится, а при второй — только хрусталик, а капсула остается в глазу.

Среди экстракапсулярных методов к наиболее прогрессивной можно отнести лазерную экстракцию катаракты с имплантацией интраокулярной линзы, при которой удаление хрусталика осуществляется при помощи ультразвука или лазерного излучения через минимальный разрез, не требующий наложения швов (рис. 2—5).

Для проведения операции в глаз вводится иголка с расположенным в ней оптоволоконном. При диаметре прокола менее 3 мм можно обойтись без наложения швов. Но даже в этом случае могут возникнуть побочные явления и послеоперационные осложнения. Во время поглощения лазерного излучения выделяется тепло, воздействующее на роговицу. Кроме того, происходит быстрое расширение материала хрусталика, имеющее характер микроразрыва. Это, в свою очередь, приводит к повреждению сетчатки, что несет ее зонной риска.

Целью данной работы является изучение этих явлений посредством численного моделирования поведения биосреды глаза во время хирургической операции.

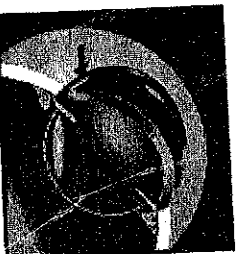


Рис. 2. Вскрытие передней капсулы

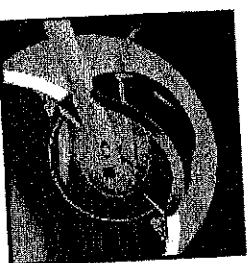


Рис. 3. Разрушение хрусталика ультразвуком

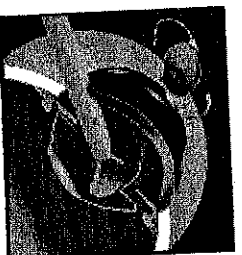


Рис. 4. Ввод глубокой линзы в капсулу хрусталика

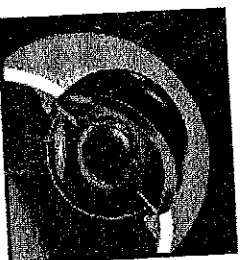


Рис. 5. Установленная линза



Здесь λ_j^i — собственные значения матриц $A_j, j = 1, 2$, определяемые из характеристических уравнений $\det(A_j - \lambda^j E) = 0, \Omega_j = \{\omega_{ik}^j\}$ — неособственные матрицы, строками которых являются линейно независимые собственные векторы ω_i^j матриц A_j , определяемые с точностью до их длины из совокупности линейных однородных систем уравнений $(A_j^T - \lambda_i^j E)\omega_i^j = 0, i = 1, \dots, 7, \Omega_j^{-1}$ — обратные к Ω_j матрицы, A_j^T — транспонированные матрицы A_j . Аналитическое выражение элементов матриц Ω_j^{-1} аналогично приведенному в [8].

При построении расчетных формул на границах прямоугольной (в координатах $(\bar{t}, \eta_1, \eta_2)$) области интегрирования рассмотрим только верхнюю ($\eta_2 = 1$) и нижнюю ($\eta_2 = 0$) границы, имея в виду, что остальные границы ($\eta_1 = 0, \eta_1 = 1$) часто являются плоскостью (или осью) симметрии, либо выбираются таким образом, чтобы за рассматриваемое время $t \leq t_1$ возмущения от неоднородностей в начальных данных не достигали этих границ. Умножив полученные разностные соотношения скалярно на собственные векторы $(\omega_i^2)_{ml}^n$, получаем соотношения

$$(\omega_i^2)_{ml}^{n+1} u_{ml}^{n+1} = B_i^2 = (\omega_i^2)_{ml}^n (u_{ml}^n + \tau f_{ml}^n + b_{ml}^n) \pm \frac{\tau}{h_2} (\lambda_i^2)_{ml}^n (\omega_i^2)_{ml}^n (u_{m,i\mp 1}^n - u_{ml}^n),$$

$i = 0, 1, \dots, L$, аппроксимирующие с первым порядком точности условия совместности вдоль линий пересечения характеристических поверхностей систем и координатной плоскости $\eta_1 = \eta_{1m}$ (с уравнениями $d\eta_2 = \lambda_i^2 dt$): $\omega_i^2 u_{i+1} + \lambda_i^2 \omega_i^2 u_{i-1} = \omega_i^2 (f - A_1 \eta_1), i = 1, 2, \dots, 7$.

Как известно, число граничных условий для гиперболической системы уравнений определяется числом отрицательных (положительных) собственных значений матрицы A_2 на верхней (соответственно, нижней) границе области интегрирования. В рассматриваемых ниже задачах на верхней границе $\eta_2 = 1$ имеет место $\lambda_7^2 < \lambda_6^2 < 0$, на нижней границе на верхней границе $\eta_2 = 1$ соответственно, $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > 0$ и, следовательно, на каждой из этих границ требуется постановка двух граничных условий. Запишем их в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\bar{t}, \eta_1, u_1, \dots, u_7) &= 0, i = 1, 2 \text{ при } \eta_2 = 0, \\ \varphi_i(\bar{t}, \eta_1, u_1, \dots, u_7) &= 0, i = 6, 7 \text{ при } \eta_2 = 1, \end{aligned}$$

причем необходимо, чтобы $\det \Omega_- \neq 0, \det \Omega_+ \neq 0$, где

$$\Omega_- = \|\bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_2 \quad \omega_3^2 \quad \dots \quad \omega_7^2\|^T, \Omega_+ = \|\omega_1^2 \quad \dots \quad \omega_5^2 \quad \bar{\omega}_6 \quad \bar{\omega}_7\|^T.$$

Здесь $\bar{\omega}_i = \{\partial \varphi_i / \partial u_1, \dots, \partial \varphi_i / \partial u_7\}, i = 1, 2, 6, 7$, а $\omega_i^2, i = 1, 2, \dots, 7$ — собственные векторы матрицы A_2 . Для наших задач граничные условия вычислялись полулинейными и после их аппроксимации имели вид:

$$\varphi_i = \bar{\omega}_i(\bar{t}^{n+1}, \eta_{1m}^{n+1}) u_{ml}^{n+1} - g_i(\bar{t}^{n+1}, \eta_{1m}), i = 1, 2, \eta_2 = 0, \text{ и } i = 6, 7, \eta_2 = 1.$$

Привлекая полученные разностные соотношения при $i = 3, \dots, 7$ для границы $\eta_2 = 0$ и при $i = 1, \dots, 5$ — для границы $\eta_2 = 1$, получаем все необходимые расчетные формулы для точек, принадлежащих этим границам. Для расчета точек на границах $\eta_1 = 0$, $\eta_1 = \eta_*$ используются лишь обычные формулы с привлечением дополнительных «случай» $\eta_1 = -h_1$, ($m = -1$), $\eta_1 = \eta_* + h_1$, ($m = M + 1$), для которых компоненты искомого вектора и определялись по данным внутри области интегрирования с учетом соответствующей симметрии или периодичности. Вид решения либо экстраполицией (в зависимости от типа границы). Вид матриц Ω_j и собственных векторов матриц A_j дан в [8]; там же приведены формулы для расчета функций на границах области.

Шаг по времени выбирался из условия устойчивости Куранта — Фридриха — Леви, имеющего вид

$$\tau \leq \left(\sum_{i=1}^2 h_i^{-1} \max |k_i| \right)^{-1}.$$

В устойчивых, но не монотонных разностных схемах, в которых на различных решениях возникают нефизические осцилляции, используются различные способы регуляризации разрывных численных решений во всей области интегрирования либо только вблизи разрывов.

Результаты расчетов

Параметры материалов глаза.

Склеры: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ дин/см², $\nu = 0,33$, $\rho = 1$ г/см³.

Хрусталик: $E = 1,4 \cdot 10^{11}$ дин/см², $\nu = 0,2$, $\rho = 1$ г/см³.

Стекловидное тело: $E = 10^{11}$ дин/см², $\nu = 0,45$, $\rho = 1$ г/см³.

Роговица: $E = 10^{11}$ дин/см², $\nu = 0,33$, $\rho = 1$ г/см³.

Лазерное воздействие моделируется путем задания в правых частях уравнений динамики деформируемой среды источника тепла $Q(t)$:

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{V \cdot T_1}, & T_0 n < t < (T_0 + T_1) n, \\ \frac{\epsilon}{V \cdot T_1} \cdot \frac{R_0}{R_1} \cdot (T_0 + T_1) n < t < T_0 (n + 1), \end{cases}$$

где $\epsilon = 10^6$ эрг, $T_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ с, $T_0 = 15 \cdot 10^{-6}$ с, $R_0/R_1 = 10^{-2}$, $\alpha = 5,2 \cdot 10^5$ К⁻¹, $V = 10^{-3}$ см³ (ϵ — энергия импульса, T_1 — длительность импульса, T_0 — период импульса, α — коэффициент теплового расширения, V — объем, в котором действует излучение в начальный момент времени, n — количество импульсов, R_0/R_1 — характеризует уровень шума).

На рисунке 7—10 приведены поля скоростей в материалах глаза. Видно, что в течение некоторого времени векторы скоростей направлены из глаза (рис. 7, 8), затем внутрь глаза (рис. 9), после взаимодействия с его границами. На рисунке 10 показаны зоны возможных разрушений в глазу (с отрицательными значениями давления).

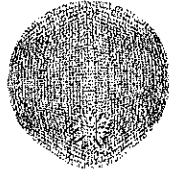


Рис. 7. Поле скоростей,
 $t = 5 \cdot 10^{-7} \text{с}$

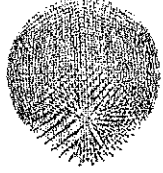


Рис. 8. Поле скоростей,
 $t = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{с}$



Рис. 9. Поле скоростей,
 $t = 6 \cdot 10^{-6} \text{с}$



Рис. 10. Зоны возможных
повреждений

Список литературы

1. Балаиовский Н.Н., Бубнов А.В., Обухов А.С., Петров И.Б. Расчет динамических процессов в глазу при лазерной экстракции катаракты. // *Мат. моделир.* 2003. Т. 15. № 11. С. 37–44.
2. Петров И.Б. О численном моделировании биомеханических процессов в медицинской практике // *Информ. технол. и вычисл. системы.* 2003. Т. 1–2. С. 102–111.
3. Федоров С.Н., Егорова Э.В., Холодов А.С., Марченкова Т.Е., Бубнов А.В. О численном моделировании процессов ирригации и аспирации при экстракапсулярной экстракции катаракты // *Вопросы кибернетики. Биомедицинформатика и её приложения.* 1988. С. 99–114.
4. Марченкова Т.Е., Бубнов А.В., Холодов А.С. Математическое моделирование ирригационно-аспирационной техники фактоэмульсификации // *Офтальмохирургия.* 1991. № 1. С. 11–15.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.
6. Физиология человека. М.: Мир, 1996. Т. 1–3.
7. Краткая медицинская энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1989. Т. 1.
8. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное решение некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // *Журн. вычисл. мат. и мат. физ.* 1984. Т. 24. № 5. С. 722–739.

Об авторах

М.С. Богомолова – ст. преподав., РГУ им. И. Канна, maria_ishanova@mail.ru.
И.Б. Петров – д-р физ.-мат. наук, проф., МФТИ.

ов
ля
се
ам
за-
й»
ты
ми-
ти
ид
ве-

на
зу-
ше-

стях

К-1,
ьса,
ния,
еме-
та.
лаза.
авле-
твия
эний