

УДК 519.63

**СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ  
НА ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТКАХ  
С КРАТНЫМ ШАГОМ ПО ВРЕМЕНИ**

© 2013 г. *И.Б. Петров, А.В. Фаворская, А.В. Санников, И.Е. Квасов*

Московский физико-технический институт (государственный университет)  
E-mail: petrov@mipt.ru

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, в рамках ГК № 07.514.11.4002.

Целью данной работы является разработка сеточно-характеристического метода на высокопроизводительных вычислительных системах с использованием неструктурированных тетраэдральных иерархических сеток, кратного шага по времени и интерполяции высоких порядков для моделирования сложных пространственных динамических процессов в гетерогенных средах. Данный метод отличается точной постановкой контактных условий и пригоден для наиболее физически корректного решения задач сейсмологии и сейсморазведки в сложных гетерогенных средах. Использование иерархических сеток позволяет учитывать большое количество неомогенных включений (трещины, каверны и т.д.). Применение именно сеточно-характеристического метода дает возможность использовать кратный шаг по времени и тем самым повысить производительность и значительно уменьшить время вычислений. Разработанные методы интерполяции высоких порядков на неструктурированных тетраэдральных сетках позволяют решать задачи сейсмологии и сейсморазведки с аппроксимацией по пространству до пятой степени включительно.

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, тетраэдральные сетки, интерполяция высоких порядков, сейсмология, сейсморазведка, параллельные алгоритмы, иерархические сетки.

**GRID-CHARACTERISTIC METHOD USING HIGH-ORDER INTERPOLATION  
ON TETRAHEDRAL HIERARCHICAL MESHES WITH  
A MULTIPLE TIME STEP**

*I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, A.V. Sannikov, I.E. Kvasov*

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

The purpose of this article is to develop a grid-characteristic method for high-performance computing systems using unstructured tetrahedral hierarchical meshes, a multiple time step and the high-order interpolation for simulating complex spatial dynamic processes in heterogeneous environments. This method has the precise formulation of contact conditions and is suitable for the physically correct solution of the seismology and seismic prospecting problems in complex heterogeneous environments. The use of the hierarchical meshes allows to take into account a large

number of non-homogeneous inclusions (cracks, cavities, etc.). The use of this grid-characteristic method makes it possible to use the multiple time step and thereby increase productivity and significantly reduce the computation time. The methods developed for high-order interpolation on unstructured tetrahedral meshes can solve the problems of seismology and seismic prospecting with the approximation in space to the fifth degree inclusive.

Key words: grid-characteristic method, tetrahedral grids, high-order interpolation, prospecting seismology, seismology, parallel algorithms, hierarchical grids.

## 1. Введение

Современные задачи по моделированию пространственных динамических процессов в сложных гетерогенных средах требуют вводить все более усложняющиеся механико-математические модели. К данному классу задач относятся и численные эксперименты в областях сейсморазведки и сейсмологии.

Сегодня сейсморазведка является одним из наиболее распространенных способов исследования пород перед глубоким бурением. Проведение численных экспериментов дает возможность значительно уточнить результаты интерпретации данных сейсморазведки и оптимизировать процесс добычи нефти. Для того чтобы проводить такие численные эксперименты, требуется высокоточное моделирование в геологических средах с большим количеством неоднородностей: полостей, трещин, расположенных без строгих закономерностей и имеющих различную форму.

Актуальными также являются и задачи моделирования землетрясений. Полученная волновая картина, как в толще земли, так и на ее поверхности и в расположенных на ней объектах, позволяет определять области возможных разрушений жилищных и промышленных сооружений, что даст возможность повысить сейсмостойкость зданий.

При данной постановке пространственных задач необходимо использование неструктурированных тетраэдральных сеток.

Так как система уравнений математической модели состояния сплошной линейно-упругой среды [1] является гиперболической и требуется высокоточный расчет волновых процессов, оптимальным является применение именно сеточно-характеристического метода [2] с использованием интерполяции [3] высоких порядков [4]. Примеры использования сеточно-характеристического метода с квадратичной интерполяцией с ограничителем на неструктурированных треугольных сетках для решения задач сейсморазведки можно найти в [5,6]. А примеры использования сеточно-характеристического метода с интерполяцией высоких порядков на тетраэдральных сетках можно найти в [7,8].

При переходе от двумерных к пространственным задачам увеличиваются и объемы данных. Поэтому требуется применение высокопроизводительных вычислительных систем. Разработанный алгоритм был распараллелен на вычислительный кластер с оптимальным использованием системных ресурсов.

Аккуратное детальное описание всех волновых процессов вблизи всех имеющихся в поставленной задаче неоднородностей требует использования достаточно подробной сетки. Чем меньше неоднородные включения нужно исследовать, тем больше придется сделать шагов по времени, а также операций на каждом временном слое. Однако в большинстве случаев неоднородности локализованы в небольшом объеме внутри области интегрирования. При данной постановке задач оптимальным является применение иерархических сеток, сгущающихся в местах расположения неоднородностей.

Но для сеточно-характеристических методов размер шага интегрирования по времени напрямую зависит от размера минимального шага по пространству. Поэтому использование обычных иерархических сеток не сократит количество шагов по времени, уменьшится только число операций на каждом временном слое.

Как показали проведенные теоретические и численные исследования, применение именно сеточно-характеристических методов позволяет использовать специальные иерархические сетки с кратным шагом. Можно делать кратный шаг не только по пространству, но и по времени и, таким образом, сокращать не только число операций, необходимых для интегрирования задач на каждом временном слое, но и число выполняемых шагов по времени в той части области интегрирования, где нет неоднородностей и используется более крупная сетка.

## 2. Постановка задачи

Согласно [1] состояние бесконечно малого объема сплошной линейно-упругой среды подчиняется следующим уравнениям:

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \quad (1)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T). \quad (2)$$

Уравнение (1) является локальным уравнением движения. В нем  $\rho$  – плотность материала,  $\mathbf{v}$  – скорость движения,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши, являющийся симметричным в силу закона парности касательных напряжений [1]. Уравнение (2) выводится из закона Гука путем дифференцирования по времени. В нем  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала.

В (1), (2) и в дальнейшем используются следующие математические обозначения:

$$\partial_t a \equiv \frac{\partial a}{\partial t} \text{ – частная производная поля } a \text{ по } t;$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \text{ – тензорное произведение векторов } \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{b}, (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i b^j;$$

$\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга.

## 3. Численный метод

Для численного решения системы (1), (2) используется сеточно-характеристический метод на тетраэдральных сетках, позволяющий строить корректные численные алгоритмы для расчета граничных точек и точек, лежащих на поверхностях раздела двух сред с разными параметрами Ляме и (или) плотностями.

На каждом шаге интегрирования по времени выбираются три произвольных направления, образующие базис, что обеспечивает изотропность метода, и вводится новая система координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . В ней систему (1), (2) можно представить в следующем виде

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A}_1 \partial_{\xi_1} \mathbf{q} + \mathbf{A}_2 \partial_{\xi_2} \mathbf{q} + \mathbf{A}_3 \partial_{\xi_3} \mathbf{q} = 0. \quad (3)$$

В (3) под вектором  $\mathbf{q}$  понимается вектор, составленный из трех компонент скорости и шести компонент симметричного тензора напряжений

$$\mathbf{q} \in \{v_1, v_2, v_3, t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{13}, t_{12}\}^T.$$

Для каждой из трех систем вида

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A}_1 \partial_{\xi_1} \mathbf{q} = 0 \quad (4)$$

справедливо следующее точное выражение:

$$\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau) = \sum_{i=1}^I \mathbf{X}_i \mathbf{q}(\xi_1 - c_i \tau, \xi_2, \xi_3, t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{X}_i$  – некие матрицы, выражающиеся через компоненты матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $c_i$  – собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\tau$  – шаг интегрирования по времени.

Собственные значения всех трех матриц выражаются через плотность и коэффициенты Ляме следующим образом:

$$c_i \in \left\{ ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}, -((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}, (\mu/\rho)^{1/2}, -(\mu/\rho)^{1/2}, (\mu/\rho)^{1/2}, -(\mu/\rho)^{1/2}, 0, 0, 0 \right\}. \quad (6)$$

Используя в (5) интерполяцию высокого порядка и последовательно применяя для каждого из направлений  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  формулы, аналогичные (5) и соответствующие системе, аналогичной (4), получаем способ нахождения решения на следующем временном слое. В программном комплексе предусмотрено использование интерполяции от первого порядка до пятого включительно, что позволяет получать высокую точность численного интегрирования решения по пространству. Также применение матриц  $\mathbf{X}_i$  реализовано с помощью двух операторов, что позволяет сократить количество интерполяций для каждой точки и каждого направления с девяти до шести.

#### 4. Граничные и контактные корректоры

Используемый метод позволяет применять наиболее корректные вычислительные алгоритмы на границах и контактных границах области интегрирования.

Пусть в матричном виде граничное условие записывается следующим образом:

$$\mathbf{D}\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau) = \mathbf{d}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau)$  – значения компонент скорости и тензора напряжений на следующем шаге интегрирования в граничной точке.

Согласно (6) для каждой матрицы  $\mathbf{A}_j$  имеется три нулевых собственных значения, три положительных и три отрицательных. Пусть для определенности вдоль направления  $\xi_1$  характеристики, соответствующие отрицательным собственным значениям матрицы  $\mathbf{A}_1$ , выходят за пределы области интегрирования.

Тогда на этапе расчета внутренних точек в соответствии с (5) будет вычислено

$$\mathbf{q}^{\text{in}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau) = \sum_{c_i \geq 0} \mathbf{X}_i \mathbf{q}(\xi_1 - c_i \tau, \xi_2, \xi_3, t).$$

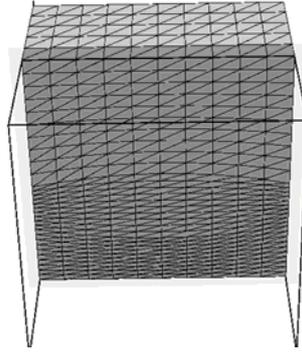


Рис.1.

Матрица  $\Omega^{*,out}$  составляется из собственных векторов, соответствующих отрицательным собственным значениям.

Действие корректора в граничной точке совершается по следующей формуле:

$$\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau) = \mathbf{F}\mathbf{q}^{\text{in}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau) + \Phi\mathbf{d}, \quad (8)$$

при этом условие (7) выполняется с таким же порядком, как и порядок интерполяции.

В формуле (8) матрица  $(\mathbf{D}\Omega^{*,out})^{-1}$  находится так, чтобы

$$(\mathbf{D}\Omega^{*,out})^{-1} \mathbf{D}\Omega^{*,out} = \mathbf{I},$$

а матрицы  $\Phi$  и  $\mathbf{F}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\Phi = \Omega^{*,out} (\mathbf{D}\Omega^{*,out})^{-1}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} - \Phi\mathbf{D}.$$

Для решения различных задач используются граничные условия заданной внешней силы, заданной скорости границы, смешанные граничные условия и неотражающие граничные условия, основанные на равенстве нулю выходящих характеристик. Для неотражающих граничных условий (7) примет следующий вид

$$\Omega_k^{out, l/r} \mathbf{q}(t + \tau, \mathbf{r}_{ep}) = 0.$$

С использованием корректора заданной скорости реализовано контактное условие полного сцепления. А контактное условие свободного скольжения вычисляется с помощью корректора смешанных граничных условий. При этом вектор скорости и нормальная компонента скорости соответственно вычисляются на основании значений  $\mathbf{q}^{\text{in}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t + \tau)$  для двух контактирующих тел. Пример сетки с параболическим слоем, ограниченным контактными поверхностями, приведен на рис.1.

### 5. Интерполяция в тетраэдре

Для определения полиномиального поля степени  $N$ , зависящего от  $x, y, z$ , требуется знать значения в  $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$  опорных точках.

Предлагается следующий способ расстановки опорных точек. В тетраэдре  $ABCD$  проводятся плоскости, параллельные его граням и делящие каждое из его ребер на  $N$  равных частей. Опорные точки нумеруются, как показано на рис.2 на примере  $N = 3$  для тетраэдра.

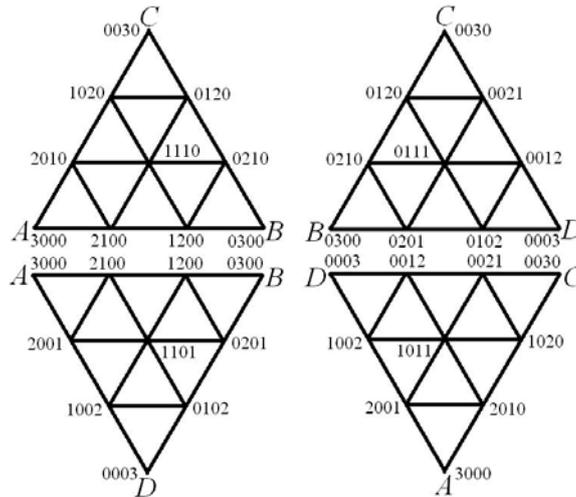


Рис.2.

Плоскости разбивают тетраэдр на подобные ему малые тетраэдры, а также на восьмигранники. В случае  $N = 2$  получается четыре малых тетраэдра и один восьмигранник, изображенный на рис.3.

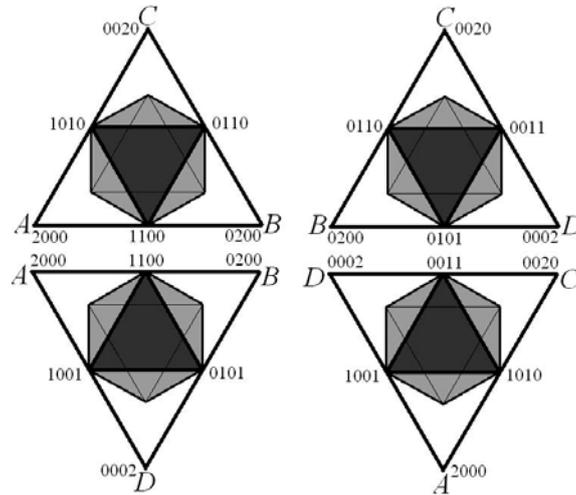


Рис.3.

Число Куранта [2] вычисляется на основании минимальной высоты, взятой по всем малым тетраэдрам.

Обозначим векторы вершин тетраэдра через  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D$ . Для каждого заданного  $N$  по соответствующим формулам вычисляются веса опорных точек  $w_{abcd}(\mathbf{r})$ . Значение полинома в искомой точке  $\mathbf{r}$  определяется по формулам

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{a,b,c,d} w_{abcd}(\mathbf{r}) v_{abcd}. \quad (9)$$

В формуле (9) через  $v_{abcd} = v(\mathbf{r}_{abcd})$  обозначено значение интерполируемой функции в опорной точке  $\mathbf{r}_{abcd}$ .

Приведем алгоритм построения интерполянта с ограничителем на тетраэдральных сетках на основе интерполяции полиномом порядка  $N$ .

1) Определяем значение пробной функции в заданной точке  $\mathbf{r}$  с помощью полиномиальной интерполяции порядка  $N$ , пусть оно равно  $v_N(\mathbf{r})$ .

2) Определяем, в какой малый тетраэдр или восьмигранник попадает точка  $\mathbf{r}$ . Если точка попадает в восьмигранник, то в данном восьмиграннике одним из трех возможных способов проводится ось, разбивающая его на четыре тетраэдра, имеющих объемы, равные объемам других малых тетраэдров, но не являющихся подобными им. Далее определяется, в какой из этих четырех тетраэдров попадает точка.

3) Сравниваем  $v_N(\mathbf{r})$  с минимумом  $m$  и максимумом  $M$  значений в вершинах этого тетраэдра:

3.1) если  $m \leq v_N(\mathbf{r}) \leq M$ , то значение интерполянта в точке  $\mathbf{r}$ :  $v_N(\mathbf{r})$ ;

3.2) если  $v_N(\mathbf{r}) < m$ , то значение интерполянта в точке  $\mathbf{r}$ :  $m$ ;

3.3) если  $v_N(\mathbf{r}) > M$ , то значение интерполянта в точке  $\mathbf{r}$ :  $M$ .

Использование интерполяции с ограничителем позволяет устранять нефизичные осцилляции полиномов, возникающие при наличии разрывов в интерполируемых полиномиальных функциях.

## 6. Иерархические сетки с кратным шагом по времени

Поясним принципы использования иерархических сеток с кратным шагом на примере следующей системы уравнений, состоящей из двух уравнений переноса

$$u_t + u_x = 0, \quad (10)$$

$$v_t - v_x = 0 \quad (11)$$

и кратности, равной двум.

Данная система уравнений (10), (11) является гиперболической. Поэтому для ее решения справедливы следующие выражения:

$$u(t + \tau, x_{2p}) = u(t, x_{2p} - \tau), \quad (12)$$

$$v(t + \tau, x_{zp}) = v(t, x_{zp} + \tau), \quad (13)$$

$$u(t + 2\tau, x_{zp}) = u(t + \tau, x_{zp} - \tau), \quad (14)$$

$$v(t + 2\tau, x_{zp}) = v(t, x_{zp} + 2\tau). \quad (15)$$

В (12)-(15) за  $x_{zp}$  обозначена та координата, слева от которой сетка мелкая, а справа – крупная (см. рис.4),  $t$  – текущее время,  $\tau$  – шаг интегрирования по времени в области с мелкой сеткой. В области с крупной сеткой он, соответственно, будет равен  $2\tau$ .

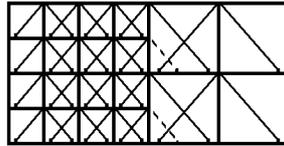


Рис.4.

При решении системы уравнений состояния линейно-упругой среды можно рассмотреть два варианта расчета граничных точек с координатой  $x_{zp}$  по данному принципу: вычислять и складывать значения по характеристикам в различных точках, зависящих от шага по времени и того, в область с какой сеткой падает характеристика, или использовать на границе корректор, основанный на контактном корректоре полного слияния. В ходе математических и численных исследований выяснилось, что второй подход лучше обобщается на угловые точки, и при его использовании не возникает нефизических осцилляций в этих точках.

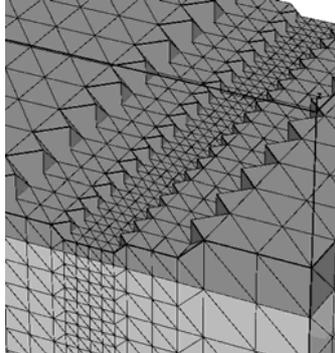


Рис.5.

На рис.5 изображен пример иерархической тетраэдральной сетки с кратностью 2. А на рис.6 приведен результат численного моделирования прохождения сейсмической волны через такую сетку, расчет выполнен с кратным шагом по времени. Использовалась полиномиальная интерполяция второго порядка на опорных точках для четвертого порядка без ограничителя. Густоте визуализированной среды соответствует модуль скорости. Можно видеть, что нефизических осцилляций даже при использовании такого

«плохого» интерполятора не появляется.

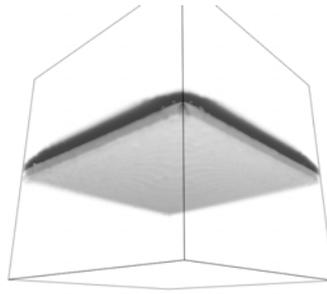


Рис.6.

## 6. Результаты

Рассматривается шесть задач:

- 1) численное моделирование торцевого удара в стенку куба,
- 2) численное моделирование сферического взрыва в центре куба,
- 3) численное моделирование приповерхностного сейсмического сферического взрыва в линейно-упругой среде,
- 4) численное моделирование землетрясения в земной коре,
- 5) численное моделирование прохождения сейсмической волны через границу раздела двух сред, имеющую параболическую форму,
- 6) численное моделирование прохождения сейсмической волны через слой с другими упругими параметрами с границами параболической формы.

Во всех шести случаях область интегрирования представляет собою куб, в котором сгенерирована необходимая для каждой конкретной задачи неструктурированная тетраэдральная сетка. На всех сторонах куба задано условие свободной границы. На всех рисунках густоте визуализированной среды соответствует модуль скорости.

В первых четырех задачах использовалась интерполяция с ограничителем на основе кубической. В пятой задаче использовалась интерполяция второго порядка с ограничителем, а в шестой – интерполяция второго порядка на точках для четвертого порядка без ограничителя.

На рис.7 изображен результат численного моделирования торцевого удара в центр стенки куба, а на рис.8 – сферического взрыва в центре куба. В обеих задачах сетка состоит из приблизительно 200 тысяч тетраэдров, не разбитых на вспомогательные, было проведено около 100 шагов по времени.

На рис.9 представлен результат моделирования приповерхностного сейсмического взрыва, а на рис.10 – результат моделирования землетрясения. В данных двух задачах сетка состоит из приблизительно 500 тысяч неразбитых тетраэдров. При моделировании приповерхностного взрыва было сделано 1200 шагов по времени, а при моделировании землетрясения – 700.

В первых четырех задачах видна картина возникающих волн: объемных сейсмических продольных и поперечных, а также поверхностных сейсмических волн Релея. Белыми векторами показано направление скорости.

На рис.11 изображен результат численного моделирования прохождения сейми-

ческой волны через границу раздела двух сред параболической формы. Ребро сейсмического куба 200 м. В данной задаче сетка состоит из 64 тысяч узлов. Было проведено около 400 шагов по времени, что соответствует 1.5 секундам. Параметры среды выше границы раздела: скорость продольных сейсмических волн  $c_p = 4230 \text{ м/с}$ , скорость поперечных сейсмических волн  $c_s = 3000 \text{ м/с}$  и плотность среды  $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$ . А ниже границы раздела:  $c_p = 2115 \text{ м/с}$ ,  $c_s = 1500 \text{ м/с}$  и  $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$ . На рис.11 видна отраженная от слоя параболической формы сейсмическая волна, а также выше нее можно видеть искаженный после прохождения данной границы раздела двух сред параболической формы импульс Берлаге.

На рис.12 изображен результат численного моделирования прохождения сейсмической волны через слой с другими упругими параметрами и с границами параболической формы. Сетка, изображенная на рис.1, состоит из приблизительно 70 тысяч узлов. На рис.12 видны две отраженные волны – первая (на рисунке верхняя) отразилась от верхней границы раздела двух сред, вторая – от нижней границы. Также можно видеть искажение формы прошедшей через слой волны (на рисунке самая нижняя из трех).

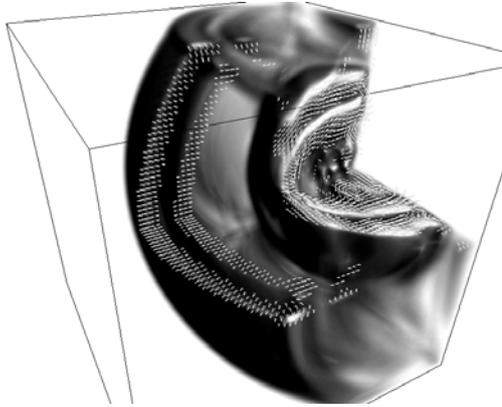


Рис.7.

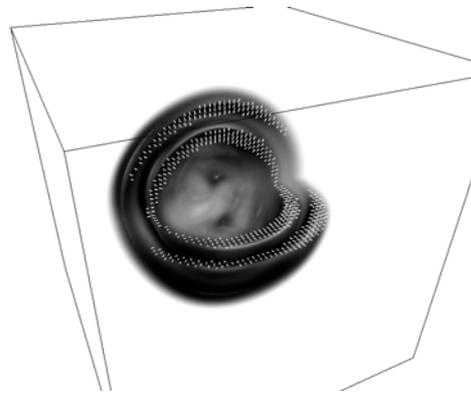


Рис. 8.

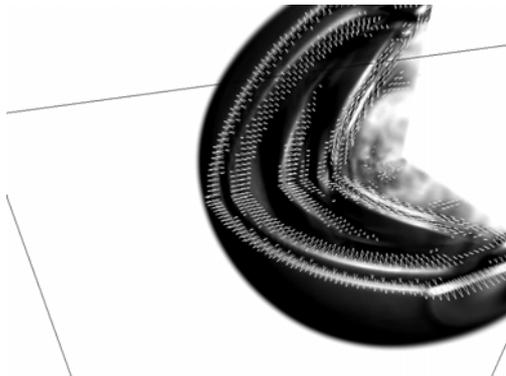


Рис. 9.

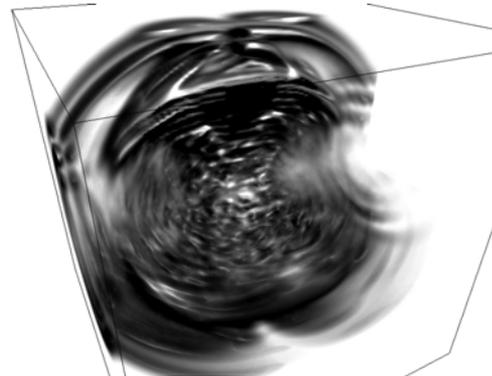


Рис. 10.

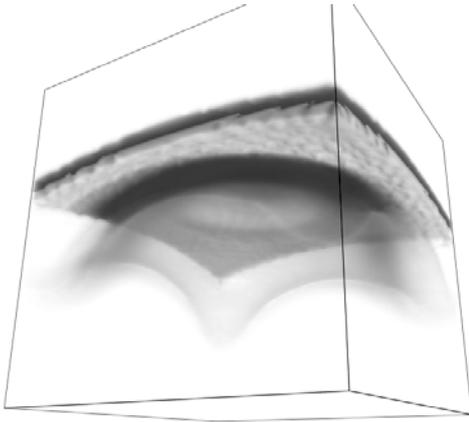


Рис.11.

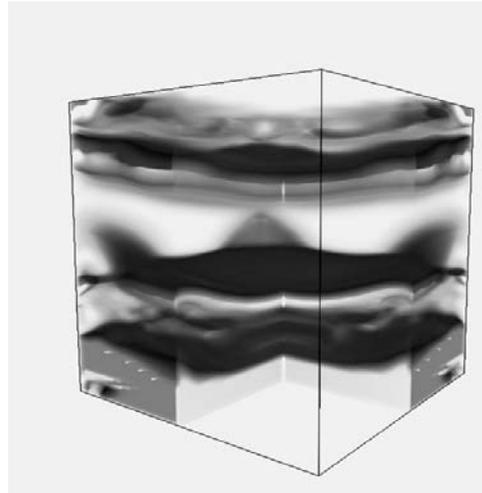


Рис.12.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондауров В.И., Фортвов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: МФТИ, 2002, 336 с.
2. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988, 288 с.
3. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2006, 523 с.
4. Петров И.Б., Фаворская А.В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информационные технологии, 2011, №9, с.30–32.
5. Квасов И.Е., Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Расчет волновых процессов в неоднородных пространственных конструкциях // Математическое моделирование, 2009, т.21, №5, с.3-9.
6. Квасов И.Е., Панкратов С.А., Петров И.Б. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом // Математическое моделирование, 2010, т. 22, №9, с.13-21.
7. Квасов И.Е., Петров И.Б., Санников А.В., Фаворская А.В. Компьютерное моделирование пространственных динамических процессов сеточно-характеристическим методом на неструктурированных тетраэдральных сетках // Информационные технологии, 2011, №9, с.28–30.
8. Квасов И.Е., Петров И.Б., Санников А.В., Фаворская А.В. Сеточно-характеристический метод высокой точности на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени // Компьютерные исследования и моделирование, 2012, т.3, № 1, с.161-171.

Поступила в редакцию 22.02.2012.