

УДК 629.7

## ДИНАМИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ

© 2012 г. В. А. Сарычев, С. А. Гутник

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 25.05.2011 г.

Исследуется динамика вращательного движения осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Численно определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение спутника–твёрдого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Введем две правые прямоугольные системы координат.

$OXYZ$  – орбитальная система координат. Ось  $OZ$  направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника. Ось  $OX$  направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс  $O$  спутника.

$Oxyz$  – связанная со спутником система координат;  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию связанной со спутником системы координат  $Oxyz$  относительно орбитальной системы координат углами тангажа ( $\alpha$ ), рыскания ( $\beta$ ) и крена ( $\gamma$ ). Тогда направляющие косинусы осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  в орбитальной системе координат задаются выражениями [1]

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(x, X) = \cos \alpha \cos \beta, \\ a_{12} &= \cos(y, X) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos(z, X) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin \beta, \\ a_{22} &= \cos(y, Y) = \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{31} &= \cos(x, Z) = -\sin \alpha \cos \beta, \\ a_{32} &= \cos(y, Z) = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

а уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \\ - \omega_0^2(h_2a_{13} - h_3a_{12}) &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \\ - \omega_0^2(h_3a_{11} - h_1a_{13}) &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \\ - \omega_0^2(h_1a_{12} - h_2a_{11}) &= 0; \\ p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + \omega_0a_{21}, \\ q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma = \bar{q} + \omega_0a_{22}, \\ r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma = \bar{r} + \omega_0a_{23}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (2), (3)

$$h_1 = -\frac{Qa}{\omega_0^2}, \quad h_2 = -\frac{Qb}{\omega_0^2}, \quad h_3 = -\frac{Qc}{\omega_0^2};$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  – главные центральные моменты инерции спутника;  $p$ ,  $q$ ,  $r$  – проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ;  $\omega_0$  – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите;  $Q$  – действующая на спутник сила сопротивления;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – координаты центра давления спутника в системе координат  $Oxyz$ . Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнения (2) получены при следующих предположениях:

1) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха;

2) влияние атмосферы на поступательное движение спутника пренебрежимо мало;

3) увлечением атмосферы вращающейся Земли пренебрегается.

Предположение 1) достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой сферической.

Для системы (2)–(3) справедлив обобщенный интеграл энергии

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] + \\ & + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2 + (B-C)a_{23}^2] - \\ & - \omega_0^2(h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13}) = \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА

Положив в (2) и (3)  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$ , где  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  – постоянные величины, получим при  $A \neq B \neq C$  уравнения

$$\begin{aligned} (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - h_2a_{13} + h_3a_{12} &= 0, \\ (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{11} + h_1a_{13} &= 0, \\ (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + h_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющие после подстановки выражений для направляющих косинусов (1) определить неизвестные величины  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ . В последующем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned} Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\ 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + \\ + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) = 0$ , которая получается проектированием уравнений (5) на оси орбитальной системы координат. Система (6) вместе с условиями ортогональности для направляющих косинусов

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\ a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

образует алгебраическую систему девяти уравнений для определения всех направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника в орбитальной системе координат.

Система уравнений (6)–(7) решена для некоторых частных случаев. В [2, 3] для случая, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника ( $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 = h_3 = 0$ ), были определены все положения равновесия спутника. Для каждой равновесной ориентации получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости. Исследована эволюция областей устойчивости в зависимости от двух безразмерных параметров задачи. Более сложный случай, когда центр давления аэродинамических сил лежит в одной из главных центральных плоскостей инер-

ции спутника ( $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 = 0$ ,  $h_3 \neq 0$ ), рассмотрен в [4]. Здесь также определены все положения равновесия спутника в зависимости от трех безразмерных параметров задачи, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия.

Аналитическое решение задачи определения положений равновесия спутника в общем случае ( $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 \neq 0$ ,  $h_3 \neq 0$ ) невозможно. В [3], используя идеи работы [5], показано, что система уравнений (6)–(7) может быть сведена к одному алгебраическому уравнению 12-го порядка с действительными коэффициентами, довольно сложно зависящими от четырех безразмерных параметров задачи. Каждому действительному корню алгебраического уравнения соответствуют два положения равновесия спутника. Так как число действительных корней алгебраического уравнения не превышает 12, то из приведенных соображений следует, что спутник на круговой орбите, находящийся под действием гравитационного и аэродинамического моментов, может иметь не более 24 положений равновесия.

Основное внимание здесь будет уделено нерассмотренному ранее частному случаю исследования положений равновесия осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. Пусть  $A \neq B = C$ ,  $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 \neq 0$ ,  $h_3 \neq 0$ . Тогда система (6), упрощаясь, примет вид

$$\begin{aligned} (A-B)a_{21}a_{31} &= 0, \\ 3(A-B)a_{11}a_{31} + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\ (A-B)a_{11}a_{21} - (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из системы уравнений (8) и условий ортогональности (7) получаем следующие два случая:

### Случай 1

$$\begin{aligned} a_{21} &= 0, \\ 3(A-B)a_{11}a_{31} + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\ h_2a_{22} + h_3a_{23} = 0, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\ a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

### Случай 2

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0, \quad h_2a_{32} + h_3a_{33} = 0, \\ (A-B)a_{11}a_{21} - (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\ a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \quad a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим вначале систему (9). Из третьего и пятого уравнений системы (9) получаем

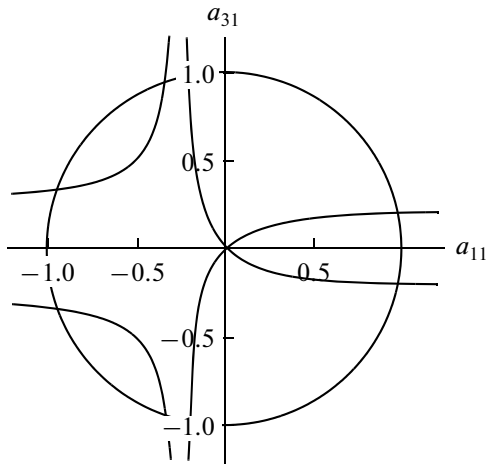


Рис. 1. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ( $m = n = 0.75$ ).

$a_{22} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$ ,  $a_{23} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$ . Учитывая свойства определителя матрицы направляющих косинусов, получаем

$$a_{12} = a_{23}a_{31}, \quad a_{13} = -a_{22}a_{31}, \quad a_{32} = -a_{11}a_{23},$$

$$a_{33} = a_{11}a_{22}, \quad h_2a_{32} + h_3a_{33} = \pm a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2}.$$

Тогда система (9) может быть представлена в виде

$$a_{12} = a_{23}a_{31}, \quad a_{13} = -a_{22}a_{31},$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad a_{23} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}},$$

$$a_{32} = -a_{23}a_{11}, \quad a_{33} = a_{22}a_{11},$$

$$3(A - B)a_{11}a_{31} \pm a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2} + h_1a_{31} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{31}^2 = 1. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь систему (10). Из второго и шестого уравнения этой системы получаем

$$a_{32} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad a_{33} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}.$$

$$a_{12} = -a_{33}a_{21}, \quad a_{13} = a_{32}a_{21}, \quad a_{22} = a_{33}a_{11},$$

$$a_{23} = -a_{32}a_{11}, \quad h_2a_{22} + h_3a_{23} = \mp a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$$

систему (10) можно записать в следующем виде:

$$a_{12} = -a_{33}a_{21}, \quad a_{13} = a_{32}a_{21},$$

$$a_{22} = a_{33}a_{11}, \quad a_{23} = -a_{32}a_{11},$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad a_{33} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad (12)$$

$$(A - B)a_{11}a_{21} \pm a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2} - h_1a_{21} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1.$$

Введем безразмерные параметры  $m = \frac{h_1}{A - B}$ ,  $n = \frac{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}{A - B}$ . Тогда последние два уравнения системы (11) запишутся в более простом виде

$$3a_{11}a_{31} + ma_{31} \pm na_{11} = 0, \quad a_{11}^2 + a_{31}^2 = 1 \quad (13)$$

или

$$9a_{11}^4 + 6ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 9)a_{11}^2 - 6ma_{11} - m^2 = 0,$$

$$a_{31} = \frac{\mp na_{11}}{m + 3a_{11}}. \quad (14)$$

Решив систему (13) или (14), можно из первых семи уравнений системы (11) определить оставшиеся направляющие косинусы.

Первое уравнение системы (13) для обоих знаков перед последним членом в левой части представляет собой уравнения четырех гипербол, две ветви которых проходят через начало системы координат ( $a_{11} = 0, a_{31} = 0$ ) в плоскости переменных  $a_{11}, a_{31}$ , а второе уравнение определяет в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (13), а, следовательно, и системы (11) зависит от характера пересечений гипербол и окружности. Ясно, что две ветви гипербол, которые проходят через начало координат, всегда пересекаются с окружностью в четырех точках. Если и две другие ветви гипербол пересекаются с окружностью, то имеем еще четыре решения. В случае касания ветвей гипербол с окружностью четыре решения сливаются в два (существуют две пары кратных корней). Таким образом, система (13), а, следовательно, и система (11) имеет либо восемь, либо четыре решения. На рис. 1, 2, 3 представлены три различных варианта взаимного расположения ветвей гипербол и окружности.

Возможно и более детальное исследование свойств системы (13). Определим границы в плоскости  $m, n$ , разделяющие области с различным числом решений. Из приведенных выше рисунков следует, что точками бифуркации являются точки плоскости  $m, n$ , через которые проходят одновременно ветви гипербол и окружность и где касательные к этим кривым совпадают. Условие совпадения касательной к двум ветвям гипербол и окружности имеет вид

$$\frac{da_{31}}{da_{11}} = -\frac{3a_{31} \pm n}{3a_{11} + m} = -\frac{2a_{11}}{2a_{31}}$$

или

$$3(a_{31}^2 - a_{11}^2) - ma_{11} \pm na_{31} = 0. \quad (15)$$

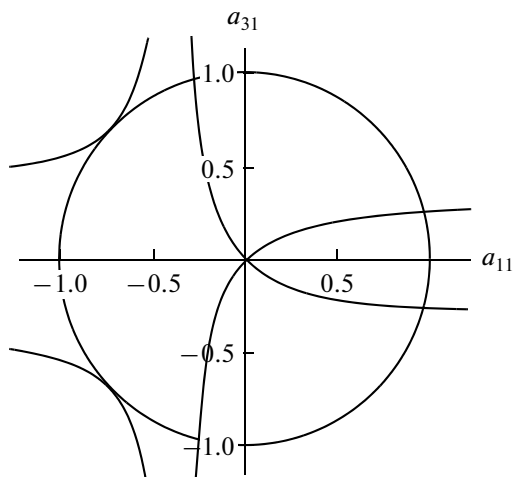


Рис. 2. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ( $m = n = 0.75\sqrt{2}$ ).

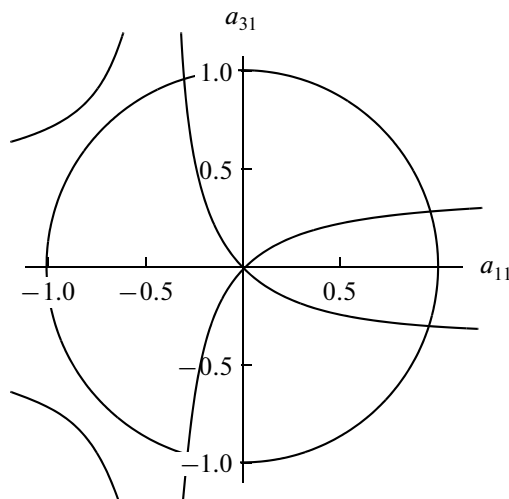


Рис. 3. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ( $m = n = 1.25$ ).

Подставив выражение для  $a_{31}$  из (14) во второе уравнение (13) и уравнение (15), получим систему уравнений

$$\frac{n^2 a_{11}^2}{(3a_{11} + m)^2} = 1 - a_{11}^2, \quad \frac{mn^2}{(3a_{11} + m)^2} = -(3a_{11} + m). \quad (16)$$

Исключив  $n^2$  из системы уравнений (16), после несложных преобразований получим соотношение  $a_{11} = -3^{-1/3}m^{1/3}$ . Подставив, наконец, выражение для  $a_{11}$  во второе уравнение (16), приходим к уравнению астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 3^{2/3}. \quad (17)$$

Внутри области  $m^{2/3} + n^{2/3} < 3^{2/3}$  существуют восемь решений; при переходе через кривую (17), являющуюся бифуркационной, происходит изменение числа решений на четыре; в области  $m^{2/3} + n^{2/3} > 3^{2/3}$  существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь последние два уравнения системы (12), записав их с использованием параметров  $m$  и  $n$  в виде

$$a_{11}a_{21} - ma_{21} \pm na_{11} = 0, \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \quad (18)$$

или

$$a_{11}^4 - 2ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 1)a_{11}^2 + 2ma_{11} - m^2 = 0, \quad (19)$$

$$a_{21} = \frac{\pm na_{11}}{m - a_{11}}.$$

Применив предложенный выше при исследовании системы (13) подход, можно показать, что и для системы (18) бифуркационной кривой, отделяющей область существования восьми решений

от области существования четырех решений, также является астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 1. \quad (20)$$

На рис. 4 представлены астроида (17) и (20), выделяющие в плоскости  $m, n$  три области с различным числом положений равновесия осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. В области  $m^{2/3} + n^{2/3} < 1$  существуют 16 решений, в области  $m^{2/3} + n^{2/3} > 1, m^{2/3} + n^{2/3} < 3^{2/3}$  существуют 12 решений, в области  $m^{2/3} + n^{2/3} > 3^{2/3}$  существуют 8 решений.

### 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Интеграл (4) для осесимметричного спутника ( $B = C$ ) упрощается и принимает вид

$$\frac{1}{2} [A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2} \omega_0^2 (A - B)(3a_{31}^2 - a_{21}^2) - \omega_0^2 (h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}) = \text{const}. \quad (21)$$

Представим  $\alpha, \beta, \gamma$  в виде  $\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}$ , где  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  — малые отклонения от положения равновесия  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \beta = \beta_0 = \text{const}, \gamma = \gamma_0 = \text{const}$ , удовлетворяющего системе уравнений (7), (8). Тогда интеграл энергии (21) может быть представлен следующим образом:

$$\frac{1}{2} [A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2} \omega_0^2 (A_{\alpha\alpha} \bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta} \bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma} \bar{\gamma}^2 + 2A_{\alpha\beta} \bar{\alpha} \bar{\beta} + 2A_{\alpha\gamma} \bar{\alpha} \bar{\gamma} + 2A_{\beta\gamma} \bar{\beta} \bar{\gamma}) + \Sigma = \text{const}.$$

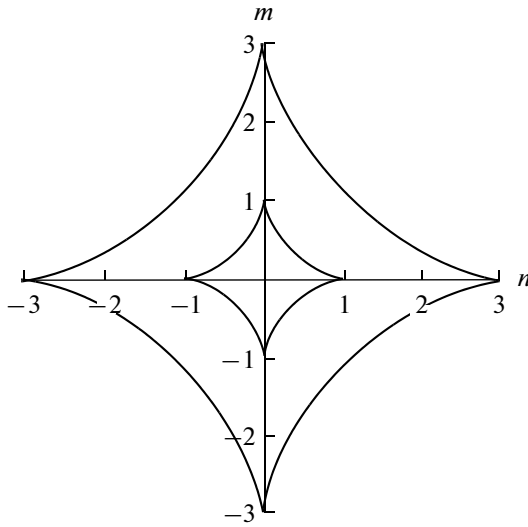


Рис. 4. Области существования 16, 12 и 8 равновесных ориентаций осесимметричного спутника.

Здесь  $\Sigma$  обозначает члены выше второго порядка малости относительно  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= 3(A - B) \cos 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0 + (h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}), \\ A_{\beta\beta} &= -(A - B) (1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \cos 2\beta_0 + h_1 a_{11} - \\ &\quad - (h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0) \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ A_{\gamma\gamma} &= h_2 a_{12} + h_3 a_{13}, \\ A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 7(A - B) a_{21} a_{31} \cos \alpha_0 = 0, \\ A_{\alpha\gamma} &= A_{\gamma\alpha} = -(h_2 a_{33} - h_3 a_{32}), \\ A_{\beta\gamma} &= A_{\gamma\beta} = -(h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0) a_{11}. \end{aligned} \quad (23)$$

Достаточные условия устойчивости положения равновесия  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$  (положительная определенность квадратичной формы (22)) имеют вид

$$A_{\alpha\alpha} > 0, \quad A_{\beta\beta} > 0, \quad A_{\beta\beta} A_{\gamma\gamma} - (A_{\beta\gamma})^2 > 0. \quad (24)$$

В случае 1  $a_{21} = \sin \beta_0 = 0$ . Из второго и третьего уравнений системы (9) получаем соотношения

$$\begin{aligned} h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0 &= \frac{3(A - B) \cos \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \sin \alpha_0, \\ h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя соотношения (25) и условие  $\sin \beta_0 = 0$ , получим выражения (23) в более простом виде

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= \frac{3(A - B) \cos^3 \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0}, \\ A_{\beta\beta} &= -(A - B) (1 + 3 \sin^2 \alpha_0) + h_1 \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ A_{\gamma\gamma} &= \frac{3(A - B) \cos \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \sin^2 \alpha_0, \\ A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 0, \quad A_{\alpha\gamma} = A_{\gamma\alpha} = 0, \\ A_{\beta\gamma} &= A_{\gamma\beta} = -[3(A - B) \cos \alpha_0 \cos \beta_0 + h_1] \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24) получаем достаточные условия устойчивости в случае 1

$$\begin{aligned} \frac{3(A - B) \cos^3 \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} &> 0, \\ (B - A) (1 + 3 \sin^2 \alpha_0) + h_1 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 &> 0, \\ A - B &< 0. \end{aligned}$$

Вводя параметр  $m$ , получаем окончательно

$$\begin{aligned} a_{11} (m + 3a_{11}^3) &< 0, \quad 3a_{11}^2 + ma_{11} - 4 < 0, \\ A - B &< 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае 2  $a_{31} = -\sin \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$  и, следовательно,  $\sin \alpha_0 = 0$ . Из второго и третьего уравнений системы (10) получаем соотношения

$$\begin{aligned} h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0 &= \\ &= \frac{(A - B) \cos \alpha_0 \cos \beta_0 - h_1}{\cos \beta_0} \sin \beta_0, \\ h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом соотношений (28) и условия  $\sin \alpha_0 = 0$  из (23) получаем

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= \frac{(A - B) \cos \beta_0 (4 \cos^2 \beta_0 - 1) + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0}, \\ A_{\beta\beta} &= \frac{-(A - B) \cos^3 \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0}, \\ A_{\gamma\gamma} &= \frac{-(A - B) \cos \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0} \sin^2 \beta_0, \\ A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 0, \quad A_{\beta\gamma} = A_{\gamma\beta} = 0, \\ A_{\alpha\gamma} &= A_{\gamma\alpha} = \frac{-(A - B) \cos \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0} \sin \beta_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Достаточные условия устойчивости (24) для положения равновесия в случае 2 имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \beta_0 [(A - B) \cos \beta_0 (4 \cos^2 \beta_0 - 1) + h_1 \cos \alpha_0] &> 0, \\ \cos \beta_0 [-(A - B) \cos^3 \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0] &> 0, \quad A - B > 0. \end{aligned}$$

Вводя параметр  $m$ , получаем

$$a_{11} \left[ a_{11}(4a_{11}^2 - 1) + m \right] > 0, \quad a_{11}(m - a_{11}^3) > 0, \quad (30)$$

$$A - B > 0.$$

Следует отметить, что условия устойчивости (27) для случая 1, когда  $A - B < 0$ , и условия устойчивости (30) для случая 2, когда  $A - B > 0$ , не могут выполняться одновременно.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Проведем анализ эволюции полученных численно положений равновесия и соответствующих им достаточных условий устойчивости при изменении параметров  $m$  и  $n$  системы. Рассмотрим, например, поведение решений в плоскости  $a_{11}$ ,  $n$  при фиксированных значениях  $m$ . Каждое положение равновесия для случая 1 (случая 2) определяется выбором одного из корней алгебраического уравнения системы (14) (системы (19)) и выбором знака направляющего косинуса  $a_{31}(a_{21})$ .

Рассмотрим свойства алгебраических уравнений в системах (14) и (19). Коэффициенты уравнений зависят от безразмерных параметров  $m$  и  $n$ , которые в свою очередь определяются размерными параметрами осесимметричного спутника  $A - B$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ . Проекция вектора аэродинамического момента и инерционный параметр  $A - B$ , а также безразмерные параметры  $m$  и  $n$ , могут принимать любые значения. Знак параметра  $n$  совпадает со знаком  $A - B$ . Так как параметры  $m$  и  $n$  входят в выражения для коэффициентов при четных степенях  $a_{11}$  алгебраических уравнений систем (14) и (19) во второй степени, а коэффициенты при нечетных степенях этих уравнений пропорциональны параметру  $m$ , то изменение знаков величин  $m$  и  $n$  при сохранении их абсолютных значений не влияет на абсолютную величину корней алгебраических уравнений. При изменении знака параметра  $m$  происходит лишь изменение знаков корней алгебраических уравнений, а при изменении знака параметра  $n$  корни алгебраических уравнений остаются неизменными. Следовательно, численное определение корней алгебраических систем (14), (19) для получения равновесных решений достаточно проводить при положительных значениях параметров  $m$  и  $n$ , а соответствующие решения для отрицательных значений  $m$  будут получаться изменением знака вычисленных корней при положительных  $m$  на противоположные. Графики ветвей решений для отрицательных значений  $m$  будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих положительных значений  $m$  относительно оси абсцисс. Графики ветвей решений для отрицательных значений  $n$  будут получаться зеркаль-

ным отображением графиков ветвей решений для соответствующих значений  $m$  при положительных значениях  $n$  относительно оси ординат.

Точки пересечения прямых  $n = \text{const}$  с астроидами (17) и (20) лежат на границах областей с постоянным числом действительных решений и, соответственно, постоянным числом положений равновесия осесимметричного спутника. Этим точкам соответствуют значения  $n = (1 - m^{2/3})^{3/2}$  и  $n = (3^{2/3} - m^{2/3})^{3/2}$ ; при данных значениях  $n$  происходит слияние ветвей решений, когда исчезают четыре решения (становятся мнимыми два корня). Точки пересечения графиков решений с осью ординат ( $n = 0$ ) находятся аналитически и равны

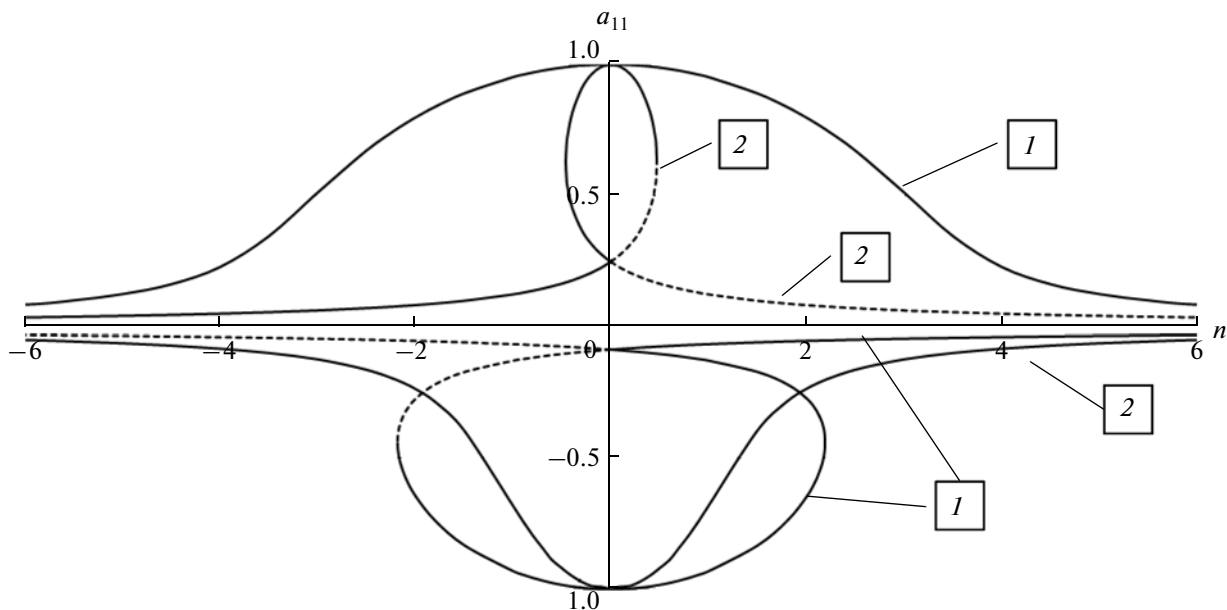
для случая 1  $a_{11} = \pm 1$  и  $a_{11} = -\frac{m}{3}$ , а для случая 2 —  $a_{11} = \pm 1$  и  $a_{11} = m$ .

Достаточные условия устойчивости положений равновесия спутника, в силу перечисленных свойств алгебраических уравнений (14), (19), будут изменяться в зависимости от знаков параметров  $m$  и  $n$  следующим образом: при изменении знака параметра  $n$  изменяется знак  $A - B$  и, соответственно, изменяются достаточные условия устойчивости для случаев 1 и 2 на противоположные.

При  $A - B > 0$  ( $n > 0$ ) условия устойчивости (30) для случая 2 при изменении знака параметра  $m$  (знака  $h_1$ ) не изменятся, потому что знаки направляющего косинуса  $a_{11}$ , удовлетворяющего уравнению (19), и знаки параметра  $m$  изменяются одновременно. При  $A - B < 0$  достаточные условия устойчивости (27) для случая 1 могут выполняться при  $n < 0$ . При изменении знака параметра  $m$  (знака  $h_1$ ) в этом случае условия устойчивости (27) также не изменятся в силу того, что знаки направляющего косинуса  $a_{11}$ , удовлетворяющего уравнению (14) и знаки параметра  $m$  изменяются одновременно. Достаточные условия устойчивости (27), (30) равновесных решений для случаев 1 и 2 не зависят от значений параметров  $h_2$  и  $h_3$ .

Графики, определяющие положения равновесия спутника при различных  $m$  и  $n$ , можно разделить на три типа, соответствующие трем диапазонам изменения параметра  $m$ :  $0 < |m| < 1$ ,  $1 < |m| < 3$ ,  $|m| > 3$ .

Параметры  $m = 0$ ,  $m = \pm 1$ ,  $m = \pm 3$  являются бифуркационными. При этих значениях происходит вырождение одной из ветвей решений в точку, при переходе через которую исчезают четыре решения. При указанных бифуркационных значениях параметра  $m$  происходит изменение типов графиков решений, связанное с изменением числа действительных корней систем уравнений (14), (19) и, соответственно, с изменением числа положений равновесия осесимметричного спутника.

Рис. 5.  $m = 0.25$ .

В случае  $m = 0$  корни уравнений (14) определяются из соотношений  $a_{11}^2 = 0$ ,  $9a_{11}^2 = 9 - n^2$  при  $|n| \leq 3$  и корни уравнений (19) из соотношений  $a_{11}^2 = 0$ ,  $a_{11}^2 = 1 - n^2$  при  $|n| \leq 1$  соответственно. Условия устойчивости (27), (30) при  $m = 0$  для случаев 1 и 2 не выполняются.

Для графиков первого типа ( $0 < |m| < 1$ ) могут существовать все 16 равновесных решений. Приведем подробное описание поведения найденных положений равновесия для графиков первого типа на примере случая  $m = 0.25$  (рис. 5). Как видно из рисунка, при  $|n| < n_1 \approx 0.458$  существуют 16 равновесных решений. Из них 8 решений (4 действительных корня полинома (14)) соответствуют случаю 1 и 8 решений (4 действительных корня полинома (19)) соответствуют случаю 2. При значениях  $n_1 \approx \pm 0.458$  прямые  $n = \pm n_1$  имеют одну общую точку с астроидой (20). В этой общей точке происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 2, при этом 4 решения случая 2 перестают существовать.

В интервале  $n_1 \leq n \leq n_2 \approx 2.184$  имеем 12 положений равновесия. Прямые  $n = \pm n_2$  имеют одну общую точку с астроидой (17), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При  $|n| > n_2$  существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений), при этом случаю 1 на рис. 5 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые, случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

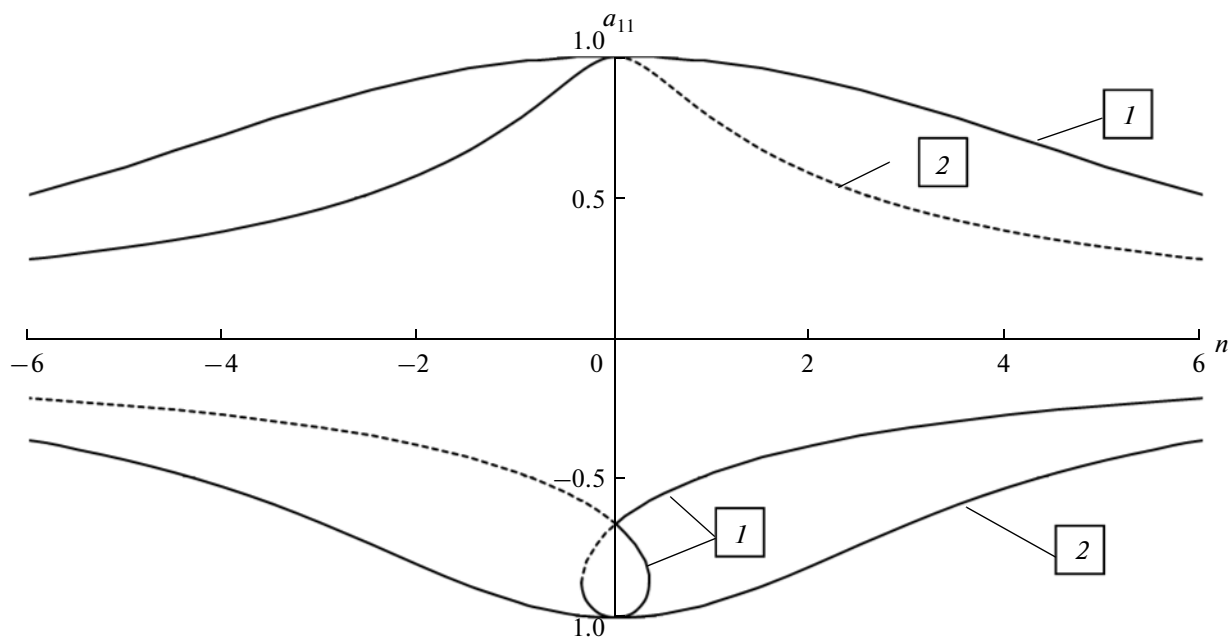
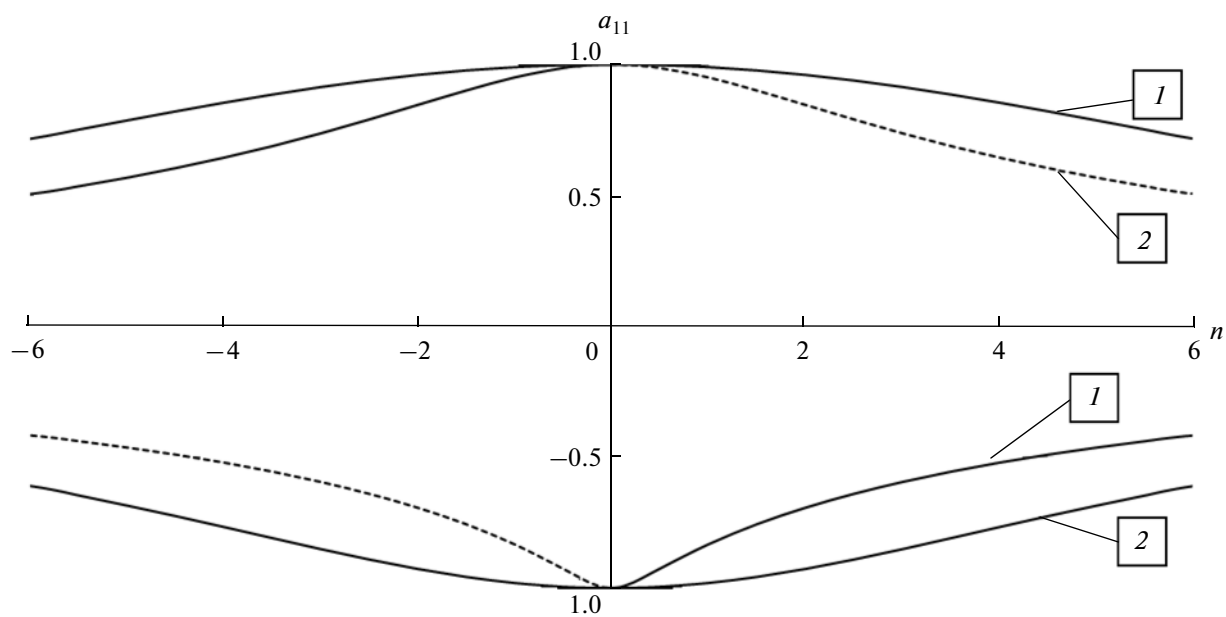
Достаточные условия устойчивости (30) в случае 2 ( $n > 0$ ) выполняются для равновесных реше-

ний, принадлежащих двум нижним положительным кривым, которые выходят из одной точки в правой полуплоскости. В случае 1 ( $n < 0$ ) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений уравнения (14), принадлежащих двум верхним отрицательным кривым, которые также выходят из одной точки, как и для случая 1, но в левой полуплоскости.

При  $m = 1$  происходит вырождение верхних положительных ветвей решений для случая 2 в точку (случай двух кратных корней  $a_{11} = 1$ ). Слияние ветвей решений для случая 1 происходит при  $n \approx 1.1225$ . При  $m = 1$  существуют устойчивая ветвь решений – нижняя положительная ветвь для случая 2 в правой полуплоскости и две верхних отрицательных ветви для случая 1 в левой полуплоскости.

Характер графиков второго типа, существующих в интервалах  $1 < m < 3$  и  $-3 < m < -1$ , рассмотрим на примере случая  $m = 2$  (рис. 6). При  $|n| < 0.345$  существуют 12 равновесных решений, из них 8 решений соответствуют случаю 1 и 4 решения – случаю 2. Прямые  $n = \pm 0.345$  имеют одну общую точку с астроидой (17), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При  $|n| > 0.345$  существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений); при этом случаю 1 на рис. 6 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые, а случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости (30) в случае 2 ( $n > 0$ ) выполняются для равновесных решений, принадлежащих нижней положительной

Рис. 6.  $m = 2$ .Рис. 7.  $m = 4$ .

кривой в правой полуплоскости. В случае 1 ( $n < 0$ ) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений, принадлежащих двум верхним отрицательным кривым, которые выходят из одной точки в левой полуплоскости.

При  $m = 3$  происходит вырождение нижних отрицательных ветвей решений для случая 1 в точку (случай двух кратных корней  $a_{11} = -1$  при  $n = 0$ ). В этом случае существуют две устойчивые ветви решений – нижняя положительная для случая 2 в



правой полуплоскости и верхняя отрицательная для случая 1 в левой полуплоскости.

При  $|m| > 3$  существуют кривые третьего типа. На примере  $m = 4$  (рис. 7) представлен типичный график кривых третьего типа.

На рис. 5–7 цифрами 1 и 2 отмечены кривые равновесных решений для случаев 1 и 2 соответственно; пунктиром выделены участки кривых, на которых выполняются достаточные условия устойчивости.

Численные результаты показывают, что для случая 2 при  $n > 0$  и при  $0 < |m| < 1$ , существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при значениях  $|m| \geq 1$  существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия). Для случая 1 при  $n < 0$  и  $0 < |m| < 3$  также существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при значениях  $|m| \geq 3$  существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия).

Отметим, что при возрастании параметров  $m$  и  $n$  равновесные решения приближаются к тривиальным положениям равновесия, когда  $\cos \beta_0 = 0$  ( $\beta_0 = \pm \pi/2$ ) для случая 2 и  $\cos \alpha_0 = 0$  ( $\alpha_0 = \pm \pi/2$ ) для случая 1. Положения равновесия спутника при больших значениях  $|m|$  приближаются к положениям равновесия, когда ось симметрии  $Ox$  спутника совпадает с осью  $OX$  орбитальной системы

координат, направленной вдоль касательной к круговой орбите.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ – 6700.2010.1) и Португальского фонда по науке и технике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Серия “Исследование космического пространства”. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
2. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2000. V. 76. № 1. P. 55–68.
3. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2007. V. 97. № 4. P. 267–287.
4. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A. Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure center in a principal plane of inertia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. V. 100. № 4. P. 301–318.
5. Сарычев В.А., Гутник С.А. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космич. исслед. 1984. Т. 22. № 3. С. 323–326. (Cosmic Research. P. 257).