УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А.А. Воронов
27 июня 2017 г.

# П Р О Г Р А М М А

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**
факультет: **ФРТК**
кафедра: **информатики и вычислительной математики**
курс: 3
семестр: 5
Трудоемкость: базовая часть – 2 зач. ед.

лекции – 30 часа
Экзамен – нет
практические (семинарские) занятия – нет
Диф. зачет – 5 семестр
лабораторные занятия – 30 часов
Самостоятельная работа –12 часов

ВСЕГО ЧАСОВ – 60

Программу и задание составил доцент А.В. Барабанщиков

Программа принята на заседании
кафедры информатики и вычислительной математики
18 апреля 2017 года.

Заведующий кафедрой И.Б. Петров

**Предмет вычислительной математики.** Специфика машинных вычислений. Элементарная теория погрешностей.

**Решение систем линейных алгебраических уравнений.** Нормы в конечномерных пространствах. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения: метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида. Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций. Необходимое, достаточное условия сходимости метода простых итераций. *Чебышёвское ускорение итераций. Метод Зейделя. *Методы решения, основанные на минимизации функционалов. *Метод сопряженных градиентов. *Проблема поиска собственных значений матрицы. *Степенной метод нахождения максимального по модулю собственного значения и метод вращений для поиска спектра самосопряженной матрицы.

**Методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений.** Локализация корней. Принцип сжимающих отображений. Метод простых итераций. Условие сходимости метода простых итераций. Метод Ньютона. Порядок сходимости и условия достижения заданной точности итерационных методов. *Методы высших порядков сходимости и наискорейшего спуска для системы уравнений. *Задачи оптимизации. *Нахождение минимума функции.

**Приближение функций, заданных на дискретном множестве.** Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона. Остаточный член интерполяции. Интерполяция по чебышёвским узлам. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками. Кусочно-многочленная интерполяция. Интерполяция сплайнами. *Понятие о сглаживающих сплайнах.
Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Среднеквадратичное приближение. *Равномерное приближение: многочлены Чебышёва, теорема об алгебраическом многочлене, наименее уклоняющемся от нуля.

**Численное дифференцирование.** Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности.

**Численное интегрирование.** Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Гаусса.
*Вычисление несобственных интегралов. *Интегрирование быстро осциллирующих функций.

**Численные методы решения для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).** Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости.
Простейшие численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Методы Рунге—Кутты решения ОДУ. *Устойчивость методов Рунге—Кутты. Барьеры Бутчера. *Оценки погрешности и управление длиной шага при численном интегрировании систем ОДУ.

## Литература

### *Основная*

1. *Демченко В.В. (и др.)*. Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Ч. 1. — М.: МФТИ, 2013. — 143 с.
2. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. 3-е изд. — М.: Физматкнига, 2013. — 240 с.
3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — СПб: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.

### *Дополнительная*

1. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. — М.: Наука–Физматлит, 1994. — 335 с.; 3-е изд. — М.: Физматлит, 2008. — 288 с. — (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994. — 528 с.; 2-е изд./ под ред. А.И. Лобанова — Долгопрудный: ИД «Интеллект» 2008. — 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Лобанов А.И.*, *Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике — М.: Интернет–университет информационных технологий, 2006. — 522 с.

4. *Хайрер Э., Нёрсетт С.П., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифферен циальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 7-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011 — 640 с.
6. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. 7-е изд. — СПб: Лань, 2009. — 672 с.

Задачи в задании из «Сборника задач для упражнений по курсу вычислительной математики» / под ред. В.С. Рябенького. — М.: МФТИ, 1996.

**1-я контрольная работа** – вторая декада октября.

## ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи 15—25 октября)

Задачи: 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.3, 4.1, 4.4, 4.8(в, м), 4.12г, 4.11а.

**Задача № 1***

Для СЛАУ $\mathbf{Au}=\mathbf{f}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, постройте сходящийся однопараметрический метод простой итерации. Укажите область параметров, при которых МПИ сходится. Оцените оптимальное значение итерационного параметра $\tau_{опт}$. Оцените количество итераций МПИ, необходимое для достижения точности $\varepsilon=10^{-3}$, если в качестве начального приближения выбран вектор $\mathbf{u}^{(0)}=(0,0)^T$.

**Задача № 2***

Проведите три шага вычислений для определения максимального по модулю собственного значения матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ и соответствующего собственного вектора степенным методом, взяв в качестве начального приближения вектор $\mathbf{u}^{(0)}=(1,0)^T$.

**Задача № 3***
Предложите сходящийся метод простой итерации и проверьте выполнение достаточного условия его сходимости для уточнения корней $-0.6 \le x_1 \le -0.5$, $-0.7 \le y_1 \le -0.6$ и $-0.9 \le x_2, y_2 \le -0.8$ системы нелинейных уравнений $\begin{cases} 2x - \exp(-x)\sin y = 0, \\ 2y + \exp(-x)\cos y = 0. \end{cases}$

Сколько итераций потребуется для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$?

**Задача № 4***
Определите порядок сходимости итерационного метода для вычисления корней $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ по формуле

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4x_n} + \frac{1}{72x_n^2} - \frac{1}{72x_n^3}.$$

*Лабораторные работы с использованием пакета MATLAB.

* Лабораторные работы из практикума по погрешностям вычислений и решению линейных систем.

* Задачи для практического решения на ЭВМ даются преподавателем в группе каждому студенту индивидуально по первым трем разделов программы.

**2-я контрольная работа** — первая декада декабря.

## ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 10—15 декабря)

Задачи: 3.1, 3.4, 5.1, 5.5, 5.7, 5.8, 5.11, 7.1, 7.3, 7.4.

**Задача № 5***

Для заданной таблицы значений функции, где в качестве узлов $\{x_k\}_{k=0}^{7}$ выбраны точки $x_k = \dfrac{2\pi k}{8}, k = \overline{0,7},$ постройте обобщенный многочлен $P_4(x) = \sum\limits_{n=-2}^{2} C_n e^{inx}$ наилучшего среднеквадратичного приближения.

| $x$ | 0 | π/4 | π/2 | 3π/4 | π | 5π/4 | 3π/2 | 7π/4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0,000 | 5,000 | 2,000 | -1,000 | 2,000 | 5,000 | 0,000 |

**Задача № 6***

Среди всех многочленов вида $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найдите многочлен наилучшего равномерного приближения многочлена $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ на отрезке [0, 2].

**Задача № 7***

Для функции, заданной таблично (в предположении непрерывности и ограниченности всех необходимых производных), найдите значение производной $f'(3.00)$ с максимально возможной точностью, используя интерполяционный полином в форме Лагранжа или в форме Ньютона. Решите задачу методом неопределенных коэффициентов. Решите задачу способом, отличным от предыдущих (и проще!). Оцените погрешность результата, если известно, что $\max\limits_{x\in[1,5]} \left| f^{(5)}(x) \right| \le \Delta$ .

| $x$ | 1.00 | 2.00 | 3.00 | 4.00 | 5.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.00 | 7.00 | 8.00 | 10.00 | 11.00 |

**Задача № 8***

Определите порядок точности формулы численного дифференцирования, приближающей вторую производную в точке $x$ на равномерной сетке с шагом $h$:

$$f''(x) \approx \frac{12f(x) - 30f(x+h) + 24f(x+2h) - 6f(x+3h)}{6h^2}.$$

**Задача № 9***

Оцените минимальное число узлов для вычисления интеграла $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ по методам трапеций, Симпсона и квадратур Гаусса. Оцените интеграл с заданной точностью любым из этих методов.

**Задача № 10**

Вычислите несобственный интеграл $I = \int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

**Задача № 11***

Постройте квадратурную формулу Гаусса по двум узлам для вычисления интеграла $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) f(x) dx$.

**Задача № 12***

Для решения задачи Коши а) на отрезке $[0,1]$ предложена разностная схема, б) на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L\}$. Исследуйте разностную задачу на аппроксимацию и определите порядок сходимости ее решения к решению дифференциальной задачи при $h \to 0$.

$$\text{а)} \left[ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = ax^2 + bx + c, \\ y(0) = 0, \end{array} \right. \quad \text{б)} \left[ \begin{array}{l} \dfrac{3y_l - 4y_{l-1} + y_{l-2}}{2h} = ax_l^2 + bx_l + c, \\ y_0 = 0,\ y_1 = ch. \end{array} \right.$$

*Лабораторные работы с использованием пакета MATLAB.

* Лабораторные работы из практикума по интерполяции и решению задачи Коши для систем ОДУ.
* Задачи для практического решения на ЭВМ даются преподавателем в группе каждому студенту индивидуально по последним четырём разделам программы.