

УДК 519.634

Памяти О.М. Белоцерковского посвящается

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ В УСЛОВИЯХ АРКТИКИ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ<sup>1)</sup>

© 2016 г. Д. И. Петров, И. Б. Петров, А. В. Фаворская, Н. И. Хохлов

(141700 М.о., Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ)

e-mail: petrov@mipt.ru

Поступила в редакцию 09.11.2015 г.

Целью данной работы является численное решение прямых задач сейсмической разведки углеводородов в условиях Арктического шельфа. При этом решается полная система уравнений, описывающая состояние линейно-упругой среды, совместно с системой уравнений, описывающей акустическое поле. Для решения обеих систем применяется сеточно-характеристический метод, позволяющий детально и физически корректно учитывать все протекающие волновые процессы и находить решение вблизи границ и контактных границ области интегрирования, в том числе на поверхности раздела акустической и линейно-упругой сред. В работе проведено сравнение сейсмограмм и волновых картин, полученных в результате численного моделирования геологических пород системой, описывающей линейно-упругие среды и системой, описывающей акустические среды. Также рассматривается задача о влиянии наличия ледяных образований на возникающие волновые картины. Библ. 26. Фиг. 10. Табл. 1.

**Ключевые слова:** сеточно-характеристический метод, численное моделирование, сейсморазведка в условиях Арктического шельфа, айсберги, акустические среды, линейно-упругие среды.

**DOI:** 10.7868/S004446691606020X

### ВВЕДЕНИЕ

По оценкам, приведенным в [1], 25% запасов углеводородов на Земле сосредоточены в Арктике. Сейсморазведывательные работы в данном регионе ведутся уже более 30 лет (см. [2]). Проведение сейсмической разведки в условиях Арктического шельфа осложнено наличием слоя воды, слоя льда (см. [3]) и ледяных образований (айсбергов, торосов), не только затрудняющих сам процесс получения данных, но также оказывающих влияние на получаемые сейсмограммы. Физические эксперименты по масштабам соответствующего влияния являются дорогостоящими, к тому же в ходе них не представляется возможным получить полную волновую картину в рассматриваемых объектах, все регистрируемые данные характеризуются погрешностью, получение данных в Арктике затруднено тяжелыми условиями работы (см. [4–6]). Однако численное моделирование дает возможность исследовать все пространственные динамические волновые процессы и определить вклад тех или иных типов волн в регистрируемые сейсмограммы.

При численном решении задач сейсмической разведки используют, в основном, лучевые методы (см. [7]). В [8–13] для решения данных задач применялись методы конечных элементов и спектральных элементов, в том числе с точностью высокого порядка. В [11], [13], [14] приведены конечно-разностные схемы, адаптированные для моделирования задач сейсмики.

Применение сеточно-характеристического метода (см. [15–22]) с использованием соответствующих условий на границах и контактных границах рассматриваемой области интегрирования (см. [15]) дает возможность исследовать выявленные проблемы путем проведения серий численных экспериментов. Данная работа посвящена сравнению волновых картин и сейсмограмм, получаемых в результате численного моделирования геологических сред системой, опи-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.575.21.0084 от 20 октября 2014 года (уникальный идентификатор ПНИ: RFMEFI57514X0084).

сывающей линейно-упругие среды, и системой, описывающей акустические среды, также рассматривается задача о влиянии айсбергов на волновые процессы, возникающие в ходе сейсмической разведки.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Согласно [23] состояние сплошной линейно-упругой среды подчиняется следующим уравнениям:

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \quad (1)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T). \quad (2)$$

Уравнение (1) является локальным уравнением движения. В нем  $\rho$  — плотность материала,  $\mathbf{v}$  — скорость движения,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши. В (2)  $\lambda, \mu$  — параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала.

В (1), (2) и в дальнейшем используются следующие математические обозначения:

$\partial_t a \equiv \frac{\partial a}{\partial t}$  — частная производная поля  $a$  по  $t$ ;

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  — тензорное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ,  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i b^j$ ;

$\mathbf{I}$  — единичный тензор второго ранга.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую акустическое поле, в том числе жидкость в приближении идеальной несжимаемой жидкости, (см. [24]), описывающую акустическое поле давления  $p$  и компонент скорости  $\mathbf{v}$ :

$$\rho \mathbf{v}_t = -\nabla p, \quad (3)$$

$$p_t = -c^2 \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (4)$$

В уравнении (4) через  $c$  обозначена скорость звука в акустической среде.

### СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Системы уравнений (1), (2) и (3), (4) можно представить в двумерном случае в виде

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1^{2D} \mathbf{q}_x + \mathbf{A}_2^{2D} \mathbf{q}_y = 0, \quad (5)$$

в трехмерном случае в виде

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1^{3D} \mathbf{q}_x + \mathbf{A}_2^{3D} \mathbf{q}_y + \mathbf{A}_3^{3D} \mathbf{q}_z = 0. \quad (6)$$

Далее проводится расщепление по двум или трем направлениям и для каждого направления получается система вида

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_x = 0, \quad (7)$$

для которой справедливо точное выражение

$$\mathbf{q}(x, y, t + \tau) = \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_j^{2D,1} \bar{\mathbf{q}}(x - c_j^{2D,1} \tau, y, t), \quad (8)$$

$$\mathbf{q}(x, y, z, t + \tau) = \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_j^{3D,1} \mathbf{q}(x - c_j^{3D,1} \tau, y, z, t) \quad (9)$$

для двумерного и трехмерного случаев соответственно. В (7) и ниже  $\mathbf{A}_1$  является матрицей  $\mathbf{A}_1^{2D}$  для двумерного случая и  $\mathbf{A}_1^{3D}$  для трехмерного случая соответственно. В (8)  $\mathbf{X}_j^{2D,1}$  — некие матрицы, выражающиеся через компоненты матрицы  $\mathbf{A}_1^{2D}$ ,  $c_j^{2D,1}$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_1^{2D}$ , в (9)  $\mathbf{X}_j^{3D,1}$  — некие матрицы, выражающиеся через компоненты матрицы  $\mathbf{A}_1^{3D}$ ,  $c_j^{3D,1}$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_1^{3D}$ , в (8), (9)  $\tau$  — шаг интегрирования по времени,  $J$  — количество

собственных значений матрицы  $\mathbf{A}_1$ . Пусть у матрицы  $\mathbf{A}_1$  существует множество  $J^+$  положительных собственных значений, множество  $J^-$  отрицательных и множество  $J^0$  нулевых.

Для матриц  $\mathbf{X}_j^1$ , и для  $\mathbf{X}_j^{2D,1}$ , и для  $\mathbf{X}_j^{3D,1}$ , выполняется соотношение:

$$\sum_{j=1}^J \mathbf{X}_j^1 = \mathbf{I}. \quad (10)$$

Таким образом, можно выразить матрицы  $\mathbf{X}_j^1$ , соответствующие нулевым собственным значениям:

$$\sum_{j \in J^0} \mathbf{X}_j^1 = \mathbf{I} - \sum_{j \in J^{0+}} \mathbf{X}_j^1 - \sum_{j \in J^-} \mathbf{X}_j^1. \quad (11)$$

Учитывая выражения (8), (9), получаем их эквиваленты:

$$\mathbf{q}(x, y, t + \tau) = \mathbf{q}(x, y, t) + \sum_{j \in J^+ \cup J^-} \mathbf{X}_j^{2D,1} (\mathbf{q}(x - c_j^{2D,1} \tau, y, t) - \mathbf{q}(x, y, t)), \quad (12)$$

$$\mathbf{q}(x, y, z, t + \tau) = \mathbf{q}(x, y, z, t) + \sum_{j \in J^+ \cup J^-} \mathbf{X}_j^{3D,1} (\mathbf{q}(x - c_j^{2D,1} \tau, y, z, t) - \mathbf{q}(x, y, z, t)). \quad (13)$$

У матрицы  $\mathbf{A}_1$  существует набор собственных векторов, таким образом ее можно представить в виде

$$\mathbf{A}^1 = (\mathbf{\Omega}^1)^{-1} \mathbf{\Lambda}^1 \mathbf{\Omega}^1. \quad (14)$$

В (14)  $(\mathbf{\Omega}^1)^{-1}$  — матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{\Lambda}^1$  — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_1$ .

Вычисления, проводящиеся в соответствии с формулами (12) и (13), разбиваются на три этапа. На первом этапе проводится домножение всех векторов  $\mathbf{q}(x, y, t)$  или  $\mathbf{q}(x, y, z, t)$  на матрицу  $\mathbf{\Omega}^1$ :

$$\mathbf{\omega}(x, y, t) = \mathbf{\Omega}^1 \mathbf{q}(x, y, t), \quad (15)$$

$$\mathbf{\omega}(x, y, z, t) = \mathbf{\Omega}^1 \mathbf{q}(x, y, z, t). \quad (16)$$

На втором этапе находятся следующие выражения для двумерного и трехмерного случаев соответственно:

$$\mathbf{\omega}(x, y, t + \tau) = \mathbf{\omega}(x, y, t) + \sum_{j \in J^+ \cup J^-} \mathbf{\omega}(x - c_j^{2D,1} \tau, y, t) - \mathbf{\omega}(x, y, t), \quad (17)$$

$$\mathbf{\omega}(x, y, z, t + \tau) = \mathbf{\omega}(x, y, z, t) + \sum_{j \in J^+ \cup J^-} \mathbf{\omega}(x - c_j^{3D,1} \tau, y, z, t) - \mathbf{\omega}(x, y, z, t). \quad (18)$$

На третьем этапе производятся обратные замены координат:

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = (\mathbf{\Omega}^1)^{-1} \mathbf{\omega}(x, y, z, t), \quad (19)$$

$$\mathbf{q}(x, y, z, t + \tau) = (\mathbf{\Omega}^1)^{-1} \mathbf{\omega}(x, y, z, t + \tau). \quad (20)$$

Использование формул (17), (18) эквивалентно решению независимых уравнений переноса

$$(\mathbf{\omega}_j)_t + c_j^1 (\mathbf{\omega}_j)_x = 0. \quad (21)$$

В уравнение (21) и ниже под  $c_j^1$  понимаются собственные значения  $c_j^{2D,1}$  для двумерного случая и  $c_j^{3D,1}$  для трехмерного случая. Затем решают данные уравнения переноса (21) в соответствии с [17], затем ту же самую процедуру повторяют для направления  $y$  или для направлений  $y, z$  для решения систем, аналогичных (7).

# ГРАНИЧНЫЕ И КОНТАКТНЫЕ КОРРЕКТОРЫ

Семейство сеточно-характеристических методов позволяет применять наиболее корректные вычислительные алгоритмы на границах и контактных границах области интегрирования, сохраняющие порядок аппроксимации метода, используемого для расчета решения во внутренних узлах области интегрирования.

Пусть в матричном виде граничное условие записывается как

$$\mathbf{D}\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t + \tau) = \mathbf{d}, \quad (22)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t + \tau) = \mathbf{d} \quad (23)$$

в двумерном и трехмерном случаях соответственно, где  $\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t + \tau)$ ,  $\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t + \tau)$  — значения компонент скорости и тензора напряжений для системы (1), (2) или скорости и давления для системы (3), (4) на следующем шаге интегрирования в граничной точке.

Для каждого направления будут свои два типа корректоров: для левой и для правой границы, т.е. всего 6 типов граничных корректоров для трехмерного случая и 4 типа для двумерного. Для определенности рассмотрим один из них. Пусть вдоль направления  $x$  характеристики, соответствующие отрицательным собственным значениям матрицы  $\mathbf{A}_1$ , выходят за пределы области интегрирования.

Тогда на этапе нахождения решения в узлах, находящихся внутри области интегрирования, в соответствии с (15)–(20) будет вычислено

$$\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t + \tau) = \mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t) + \sum_{j \in J^+} \mathbf{X}_j^{2D,1} (\mathbf{q}(x_{\text{гр}} - c_j^{2D,1} \tau, y_{\text{гр}}, t) - \mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t)), \quad (24)$$

$$\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t + \tau) = \mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t) + \sum_{j \in J^+} \mathbf{X}_j^{3D,1} (\mathbf{q}(x_{\text{гр}} - c_j^{2D,1} \tau, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t) - \mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t)). \quad (25)$$

Матрица  $\mathbf{\Omega}^{*,out}$  составляется из собственных векторов, соответствующих отрицательным собственным значениям.

Действие корректора в граничной точке совершается по формулам

$$\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t + \tau) = \mathbf{F}\mathbf{q}^{\text{in}}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t + \tau) + \mathbf{\Phi}\mathbf{d}, \quad (26)$$

$$\mathbf{q}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t + \tau) = \mathbf{F}\mathbf{q}^{\text{in}}(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, z_{\text{гр}}, t + \tau) + \mathbf{\Phi}\mathbf{d} \quad (27)$$

для двумерного и трехмерного случаев соответственно, при этом условие (22), (23) выполняется с тем же порядком сходимости, каким обладает сам используемый метод, применяемый для решения системы (1), (2) и, соответственно, для нахождения значений (24), (25).

В (27) матрицы  $\mathbf{\Phi}$  и  $\mathbf{F}$  вычисляются по формулам

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega}^{*,out} (\mathbf{D}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1}, \quad (28)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}\mathbf{D}, \quad (29)$$

а в (28) матрица  $(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1}$  находится так, чтобы выполнялось условие

$$(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} \mathbf{D}\mathbf{\Omega}^{*,out} = \mathbf{I}, \quad (30)$$

Для решения системы (1), (2) реализованы граничные условия заданной скорости границы, заданной плотности внешних сил, смешанные и неотражающие граничные условия, контактные условия полного сцепления, свободного скольжения и динамической силы трения (см. [25]). Для решения системы (3), (4) реализованы граничные условия заданной нормальной компоненты скорости границы, заданного давления и контактное условие. Также реализовано контактное условие на границе между линейно-упругими и акустическими средами (см. [16]).

Пусть в части области интегрирования  $a$  решается система уравнений (1), (2), а в части области интегрирования  $b$  решается система уравнений (3), (4),  $\mathbf{p}$  — вектор внешней нормали к телу  $a$ . Рассмотрим контактное условие между ними на примере трехмерного случая. Система (1), (2) в трехмерном случае имеет три выходящих характеристики, а система (3), (4) в трехмерном случае

имеет одну выходящую характеристику. Таким образом, для нахождения всех четырех выходящих характеристик необходимо выполнение следующих контактных условий:

$$p^{b,n+1} = -(\sigma^{a,n+1} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}, \quad (31)$$

$$\sigma^{a,n+1} \cdot \mathbf{p} - (\sigma^{a,n+1} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0, \quad (32)$$

$$\mathbf{v}^{a,n+1} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{v}^{b,n+1} \cdot \mathbf{p}. \quad (33)$$

Условие (31) представляет собой равенство нормальной компоненты поверхностной плотности сил со стороны твердого тела давлению в идеальной жидкости, условие (32) обеспечивает равенство нулю тангенциальной компоненты поверхностной плотности сил со стороны твердого тела, а (33) задает равенство нормальных компонент скоростей в идеальной жидкости и твердом теле.

### ЛИНЕЙНО-УПРУГИЕ СРЕДЫ

Рассмотрим для определенности направление  $x$ . Пусть вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль выбранного направления, а векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  (или только вектор  $\mathbf{n}_1$  в двумерном случае) образуют с ним декартову систему координат. Введем симметричные тензоры второго ранга

$$\mathbf{N}_{ij} = \frac{1}{2}(n_i \otimes n_j + n_j \otimes n_i), \quad (34)$$

где индексы варьируются от 0 до 2, под  $\mathbf{n}_0$  понимается вектор  $\mathbf{n}$ .

Действие матрицы  $\mathbf{A}_1$  на вектор неизвестных, задаваемый соотношением для трехмерного случая

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}]^T \quad (35)$$

и соотношением для двумерного случая

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ \sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]^T, \quad (36)$$

может быть записано в виде

$$\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \\ \lambda(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu(\mathbf{n} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Матрицы  $\mathbf{A}_1^{3D}$ ,  $\mathbf{A}_2^{3D}$  и  $\mathbf{A}_3^{3D}$  имеют одинаковый набор собственных значений:

$$\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\}. \quad (38)$$

Матрицы  $\mathbf{A}_1^{2D}$ ,  $\mathbf{A}_2^{2D}$  также имеют одинаковый набор собственных значений:

$$\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, 0\}. \quad (39)$$

В двумерном случае действие матрицы  $\boldsymbol{\Omega}_1$ , фигурирующей в соотношении (15), на вектор неизвестных (36) можно представить следующим образом:

$$\omega_{1,2} = \left( \boldsymbol{\Omega}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \right)_{1,2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_p \rho} \mathbf{N}_{00} \div \boldsymbol{\sigma}, \quad (40)$$

$$\omega_{3,4} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{01} \div \boldsymbol{\sigma}, \quad (41)$$

$$\omega_5 = \left( \mathbf{N}_{11} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{N}_{00} \right) \div \boldsymbol{\sigma}. \quad (42)$$

В трехмерном случае действие матрицы  $\Omega_1$ , фигурирующей в соотношении (16), на вектор неизвестных (35) можно представить выражениями (40), (41) и следующими:

$$\omega_{5,6} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{02} \div \boldsymbol{\sigma}, \quad (43)$$

$$\omega_7 = \mathbf{N}_{12} \div \boldsymbol{\sigma}, \quad (44)$$

$$\omega_8 = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) \div \boldsymbol{\sigma}, \quad (45)$$

$$\omega_9 = \left( \mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{N}_{00} \right) \div \boldsymbol{\sigma}. \quad (46)$$

В двумерном случае действие матрицы  $(\Omega_1)^{-1}$ , фигурирующей в соотношении (19), на вектор  $\boldsymbol{\omega}$  можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = (\Omega_1)^{-1} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\omega_1 + \omega_2) \mathbf{n} + (\omega_3 + \omega_4) \mathbf{n}_1 \times \\ \times (\omega_2 - \omega_1) (\rho(c_p - c_3) \mathbf{N}_{00} + \rho c_3 \mathbf{I}) + 2\rho c_s (\omega_4 - \omega_3) \mathbf{N}_{01} + 2\omega_5 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix}. \quad (47)$$

В трехмерном случае действие матрицы  $(\Omega_1)^{-1}$ , фигурирующей в соотношении (20), на вектор  $\boldsymbol{\omega}$  можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = (\Omega_1)^{-1} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\omega_1 + \omega_2) \mathbf{n} + (\omega_3 + \omega_4) \mathbf{n}_1 + (\omega_5 + \omega_6) \mathbf{n}_2 \times \\ \times \rho (\omega_2 - \omega_1) ((c_p - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}) + 2c_s \rho (\omega_4 - \omega_3) \mathbf{N}_{01} + \\ + 2c_s \rho (\omega_6 - \omega_5) \mathbf{N}_{02} + 4\omega_7 \mathbf{N}_{12} + \omega_8 (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) + \omega_9 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

В (47), (48) и далее через  $c_3$  обозначена величина

$$c_3 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} c_p. \quad (49)$$

Рассмотрим граничный корректор с заданной плотностью внешних сил  $\mathbf{f}$ . В данном случае условие (22), (23) принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (50)$$

В (50) и далее  $\mathbf{p}$  — вектор внешней нормали к границе.

Для граничного корректора с заданной скоростью границы  $\mathbf{V}$  условие (22), (23) принимает вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}. \quad (51)$$

А для граничного корректора смешанных граничных условий с заданными нормальной проекцией скорости границы  $V_p$  и тангенциальной составляющей плотности внешних сил  $\mathbf{f}_\tau$  условие (22), (23) принимает вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = V_p, \quad (52)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (53)$$

где

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\tau + ((\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau) \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}. \quad (54)$$

Для второго граничного корректора смешанных граничных условий с заданными тангенциальной составляющей скорости границы  $\mathbf{V}_\tau$  и нормальной проекции плотности внешних сил  $f_p$  условие (22), (23) принимает вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\tau, \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (56)$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{p} = f_p. \quad (57)$$

Рассмотрим неотражающий граничный корректор. Тогда разности значений вдоль характеристик (17), (18), выходящих за границы области интегрирования, должны быть равны нулю, т.е.

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Omega}^{\text{out}}, \quad (58)$$

$$\mathbf{d} = 0, \quad (59)$$

где  $\mathbf{\Omega}^{\text{out}}$  — матрица, составленная из столбцов матрицы  $\mathbf{\Omega}$ , соответствующих выходящим характеристикам. Формулы (28) и (29) примут вид

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega}^{*,\text{out}} \left( \mathbf{\Omega}^{\text{out}} \mathbf{\Omega}^{*,\text{out}} \right)^{-1}, \quad (60)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{*,\text{out}} \left( \mathbf{\Omega}^{\text{out}} \mathbf{\Omega}^{*,\text{out}} \right)^{-1} \mathbf{\Omega}^{\text{out}}. \quad (61)$$

Пусть здесь и далее для случаев контактных корректоров есть тело  $a$  и тело  $b$ ,  $\mathbf{p}$  — вектор внешней нормали к границе тела  $a$ .

Рассмотрим контактный корректор полного слипания. Условия, выполняющиеся на контактирующей поверхности, имеют вид

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^b = \mathbf{V}, \quad (62)$$

$$\mathbf{f}^a = -\mathbf{f}^b. \quad (63)$$

Рассмотрим контактный корректор свободного скольжения. Условия, выполняющиеся на контактной поверхности, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{p} = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{p} = V_p, \quad (64)$$

$$f_p^a = -f_p^b, \quad (65)$$

$$f_\tau^a = f_\tau^b = 0. \quad (66)$$

## АКУСТИЧЕСКИЕ СРЕДЫ

Для определенности рассмотрим направление  $x$ . Действие матрицы  $\mathbf{A}_1$  на вектор неизвестных, задаваемый соотношением для трехмерного случая

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ p]^T \quad (67)$$

и соотношением для двумерного случая

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ p]^T, \quad (68)$$

может быть записано в виде

$$\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{\rho} \mathbf{n} \\ c^2 \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Матрицы  $\mathbf{A}_1^{3D}$ ,  $\mathbf{A}_2^{3D}$  и  $\mathbf{A}_3^{3D}$  имеют одинаковый набор собственных значений

$$\{c, -c, 0, 0\}. \quad (70)$$

Матрицы  $\mathbf{A}_1^{2D}$ ,  $\mathbf{A}_2^{2D}$  также имеют одинаковый набор собственных значений:

$$\{c, -c, 0\}. \quad (71)$$

В двумерном случае действие матрицы  $\Omega_1$ , фигурирующей в соотношении (15), на вектор неизвестных (68) можно представить следующим образом:

$$\omega_{1,2} = \left( \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{bmatrix} \right)_{1,2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm \frac{p}{c\rho}, \quad (72)$$

$$\omega_3 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}. \quad (73)$$

В трехмерном случае действие матрицы  $\Omega_1$ , фигурирующей в соотношении (16), на вектор неизвестных (67) можно представить выражениями (72), (73) и следующим:

$$\omega_4 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v}. \quad (74)$$

В двумерном случае действие матрицы  $(\Omega_1)^{-1}$ , фигурирующей в соотношении (19), на вектор  $\omega$  можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{bmatrix} = \Omega^{-1} \omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\omega_1 + \omega_2) \mathbf{n} + \omega_3 \mathbf{n}_1 \\ c\rho(\omega_1 - \omega_2) \end{bmatrix}. \quad (75)$$

В трехмерном случае действие матрицы  $(\Omega_1)^{-1}$ , фигурирующей в соотношении (20), на вектор  $\omega$  можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{bmatrix} = \Omega^{-1} \omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\omega_1 + \omega_2) \mathbf{n} + \omega_3 \mathbf{n}_1 + \omega_4 \mathbf{n}_2 \\ c\rho(\omega_1 - \omega_2) \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Рассмотрим граничное условие с заданным давлением. Выражение (22), (23) примет вид

$$p^{n+1} = p. \quad (77)$$

Граничный корректор будет действовать по следующим выражениям:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{\text{in}} + \frac{p^{\text{in}} - p}{c\rho} \mathbf{p}, \quad (78)$$

$$p^{n+1} = p. \quad (79)$$

Рассмотрим граничное условие с заданной нормальной проекцией скорости. Выражение (22), (23) примет вид

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{p} = V_p. \quad (80)$$

Граничный корректор будет действовать по следующим выражениям:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{\text{in}} - (\mathbf{v}^{\text{in}} \cdot \mathbf{p} - V_p) \mathbf{p}, \quad (81)$$

$$p^{n+1} = p^{\text{in}} + c_1 \rho (\mathbf{v}^{\text{in}} \cdot \mathbf{p} - V_p). \quad (82)$$

Рассмотрим контактный корректор со следующими условиями:

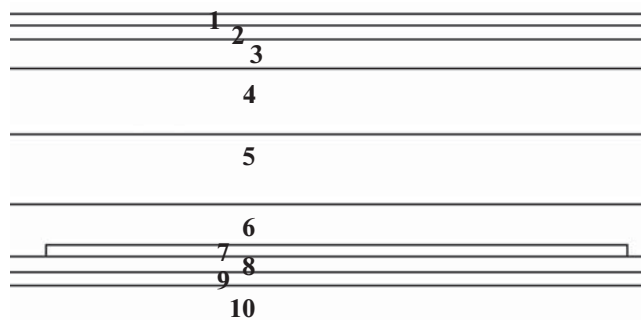
$$\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{p} = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{p} = V_p, \quad (83)$$

$$p^a = p^b. \quad (84)$$

Найдем  $p$  по формуле

$$p = \frac{c^a \rho^a p^{\text{in},b} + c^b \rho^b p^{\text{in},a} - c^a \rho^a c^b \rho^b ((\mathbf{v}^{\text{in},b} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{v}^{\text{in},a} \cdot \mathbf{p}))}{c^a \rho^a + c^b \rho^b}. \quad (85)$$

Подставляя  $p$  в выражения (78) и (79), для обоих тел получаем действие данного контактного корректора.



Фиг. 1. Расположение десяти слоев в рассматриваемой задаче.

### СРАВНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ И АКУСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Рассматривается многослойная геологическая среда, схема расположения слоев приведена на фиг. 1. Ширина области интегрирования берется равной 12000 м, глубина десятого слоя – 2601 м. По бокам области интегрирования ставятся неотражающие граничные условия (58)–(61), на дневной поверхности ставится условие заданного давления (77)–(79), равного нулю. Источник расположен на глубине 6 м и задается импульсом Риккера с частотой  $f$ , заданной выражением

$$f = \frac{\sqrt{6}}{\pi} f_M. \quad (86)$$

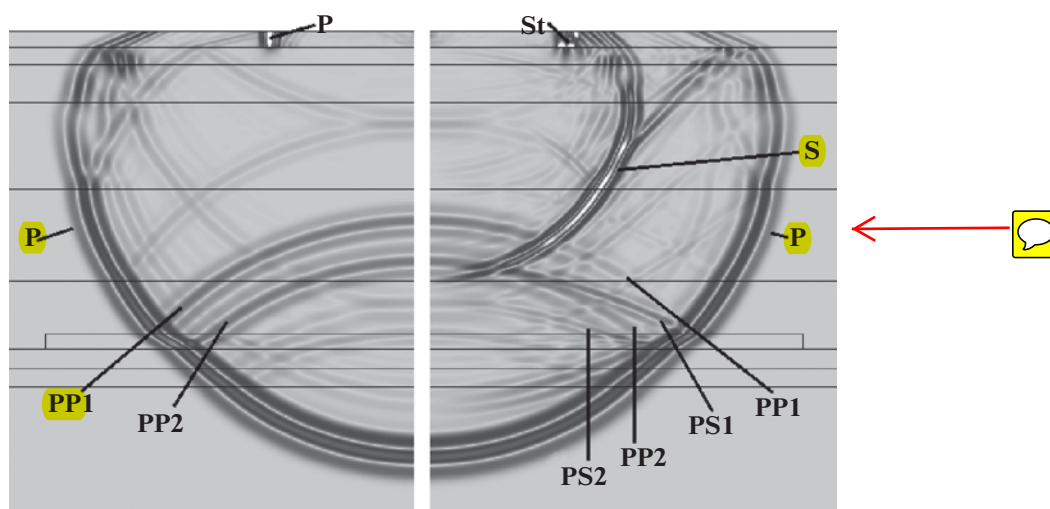
В (86) через  $f_M$  обозначена величина, равная единице, деленной на расстояние между минимумами импульса Риккера, взятая равной 40 Гц.

Приемники также были заглублены на 6 м и удалены от источника на расстояние 4500 м в каждую сторону, располагались через каждые 24 м. Шаг по времени брался равным 0.00037 сек, проводился 5001 шаг по времени, сетка в 10-м слое состояла из квадратов со стороной 3 м, сетка в остальных слоях состояла из прямоугольников 3 м на 2 м.

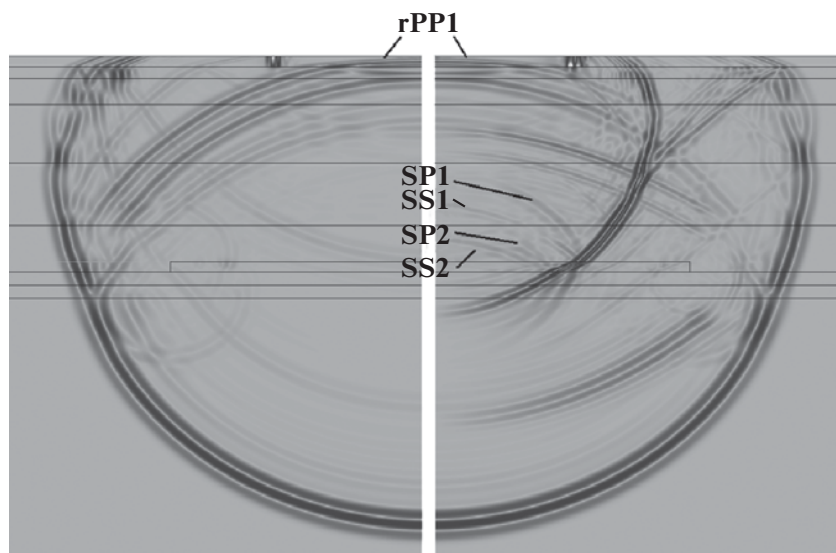
При этом численное моделирование было проведено в двух постановках. В первой постановке первый слой представляет собою воду, параметры всех слоев приведены в таблице, в первом слое решалась система (3), (4), в остальных – (1), (2), на границе между первым и вторым слоем ставилось условие (31)–(33), а на границе между остальными слоями – условие (62), (63). Во второй постановке во всех слоях решалась система (3), (4), за скорость  $c$  бралась скорость продольных волн в соответствующем слое, на границе между всеми слоями ставилось условие (83)–(85). В обеих постановках седьмой слой соответствует углеводородному резервуару.

Таблица. Сейсмические характеристики десяти слоев

Номер слоя	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Скорость продольных волн, м/сек	Скорость поперечных волн, м/сек	Мощность слоя, м
1	1000	1500	—	60
2	2300	3200	1960	70
3	2300	3700	2260	150
4	2400	4000	2450	340
5	2500	4300	2630	360
6	2600	4500	2750	270
7	2300	3200	1700	60
8	2600	4600	2820	80
9	2700	4800	2940	70
10	2800	5400	3300	2601



Фиг. 2. Волновые картины в момент времени 0.4514 сек. Отражение продольной волны от резервуара.

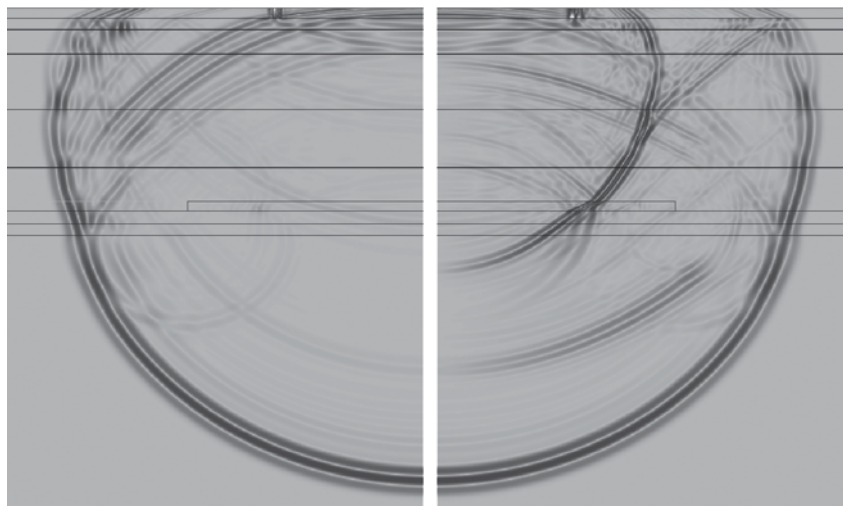


Фиг. 3. Волновые картины в момент времени 0.6438 сек. Отражение поперечной волны от резервуара.

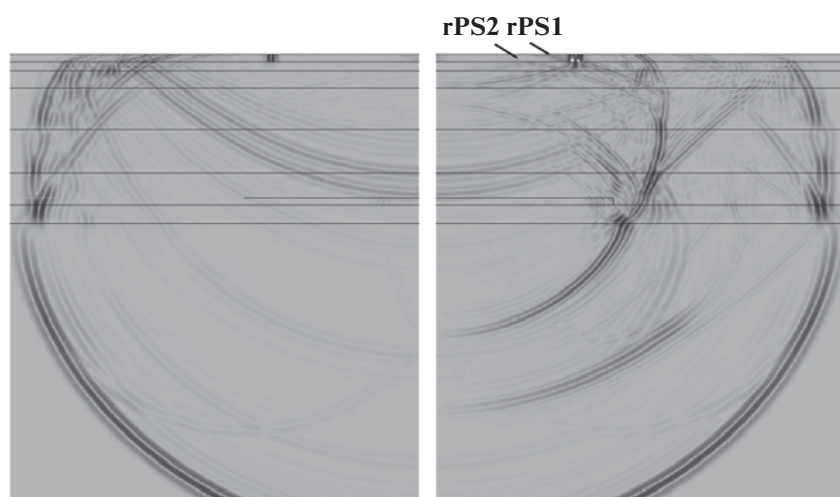
На рис. 2–7 приведены волновые картины в моменты времени 0.4514 сек, 0.6438 сек, 0.6808 сек, 0.8991 сек, 1.332 сек и 1.85 сек соответственно, градацией серого показан модуль скорости. На рис. 2–6 на левой половине рисунков показывается регион из левой части области интегрирования для второй постановки, на правой половине – из правой части для первой постановки, регионы имеют различный размер для различных рисунков. На фиг. 7 приведена верхняя часть области интегрирования для второй постановки, а снизу – для первой. Приемники также были заглублены на 6 м и удалены от источника на расстояние 4500 м в каждую сторону, располагались через каждые 24 м.

На фиг. 8 изображены сейсмограммы (см. [26]): слева – с приемников, расположенных левее источника для второй постановки, а справа – с приемников, расположенных правее источника для первой постановки. Для наглядности, расчеты были проведены с устранением кратных волн в водном слое.

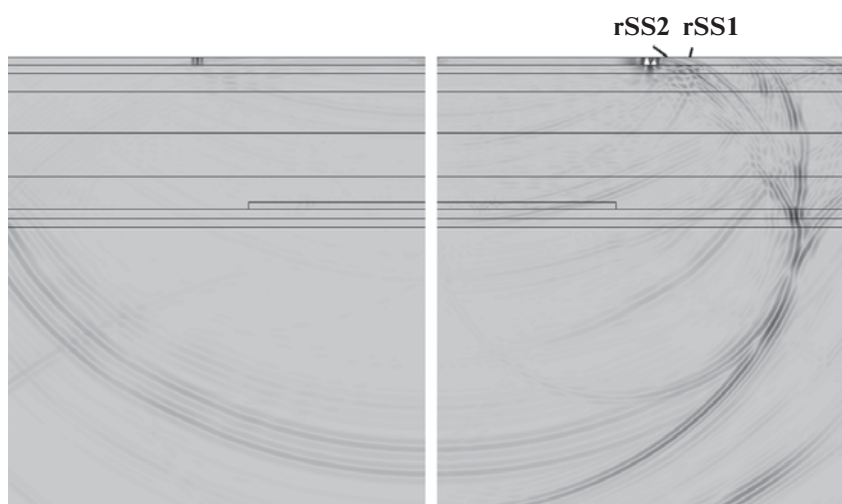
На фиг. 2, 7 буквой P отмечены продольные волны от источника, St – волны Стоунли в воде, S – поперечные волны, возникающие при распространении продольных волн P в геологических



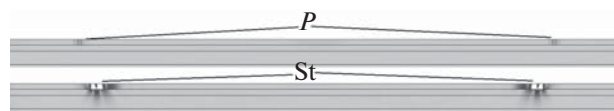
**Фиг. 4.** Волновые картины в момент времени 0.6808 сек. Отклик от резервуара в воде.



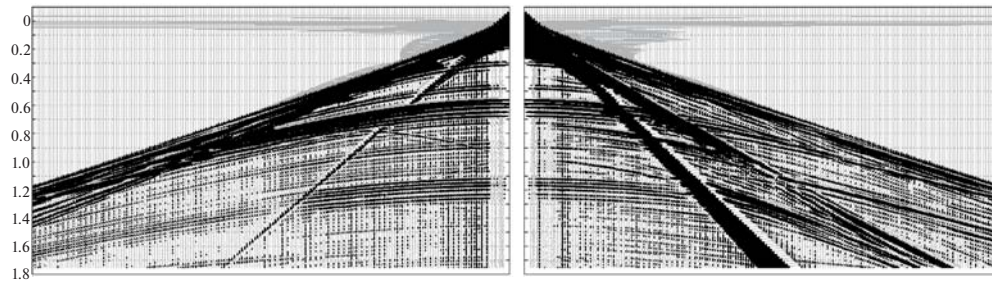
**Фиг. 5.** Волновые картины в момент времени 0.8991 сек. Отклик от резервуара в воде.



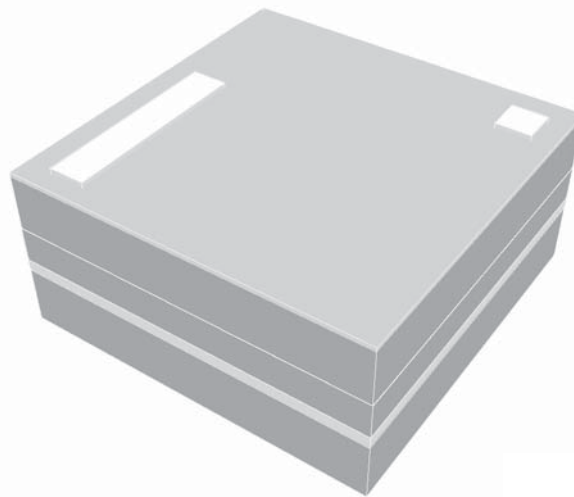
**Фиг. 6.** Волновые картины в момент времени 1.332 сек. Отклик от резервуара в воде.



Фиг. 7. Волновые картины в момент времени 1.85 сек. Волны Стоунли.



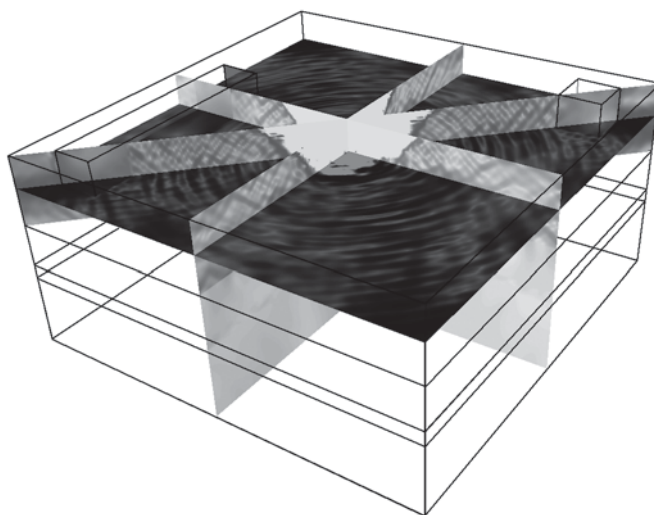
Фиг. 8. Сейсмограммы.



Фиг. 9. Постановка задачи.

породах. На фиг. 2 буквами PP1 отмечены отраженные от верхней границы резервуара PP-волны, PP2 — отраженные от нижней границы резервуара PP-волны, PS1 — отраженная от верхней границы резервуара обменная PS-волна, PS2 — отраженная от нижней границы резервуара обменная PS-волна. На фиг. 3 буквами SP1 отмечена отраженная от верхней границы резервуара обменная SP-волна, SP2 — отраженная от нижней границы резервуара обменная SP-волна, SS1, SS2 — отраженные от верхней и нижней границ резервуара SS-волны, rPP1 — отклики от PP1 волн в толще воды. На фиг. 4 буквами rPP2 обозначены отклики от PP2-волн в толще воды. На фиг. 5 буквами rPS1, rPS2 обозначены отклики от PS1-, PS2-волн в толще воды. На фиг. 6 буквами rSS1, rSS2 обозначены отклики от SP1-, SP2-, SS1-, SS2-волн в толще воды.

Видно, что при моделировании геологических сред путем решения системы (3), (4), описывающей акустическое поле, отсутствуют волны Стоунли (St), поперечные волны в геологических породах от источника (S), отраженные от верхней и нижней границы резервуара обменные PS-волны (PS1, PS2), отраженные от верхней и нижней границы резервуара SS-волны (SS1, SS2), отраженные от верхней и нижней границы резервуара обменные SP-волны (SP1, SP2) и соответственно отклики от них в толще воды (rPS1, rPS2, rSS1, rSS2, rSP1, rSP2). Данное отличие выра-



Фиг. 10. Волны в воде, отраженные от айсбергов.

жено также и в отличии сейсмограмм, на которых приведена вертикальная компонента скорости (фиг. 8).

### ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ НАЛИЧИИ АЙСБЕРГОВ

Рассматривается область интегрирования, представляющая собой параллелепипед шириной 120 м, глубиной 60 м и длиной 120 м. Моделируемая среда является многослойной системой, состоящей из водной толщи, в которой находятся два айсберга, и донного грунта с углеводородо-содержащим слоем.

Расчет проводился на прямоугольной сетке, содержащей  $5.4 \times 10^7$  узлов. Начальное точечное возмущение моделировалось импульсом Риккера частотой 42.85 Гц. На боковых границах области интегрирования поставлены неотражающие граничные условия (58)–(61). Было выполнено 15000 шагов по времени, шаг по времени составлял  $3 \times 10^{-5}$  сек. Шаг по координате брался равным 0.4 м. Рассматривались два айсберга размером 12 м на 64 м на 12 м и 12 м на 12 м на 12 м соответственно, заглубленные на 12 метров и выступающие над поверхностью воды на 1 м с плотностью 917 кг/м<sup>3</sup>, скорость продольных волн полагалась равной 394 м/сек, поперечных – 2491 м/сек. На выступающих поверхностях айсбергов, плотностью внешней силы (50), равной нулю, на верхней поверхности воды ставилось условие с заданным давлением (77)–(79), равным нулю. Слой воды имел следующие характеристики: толщину 20 м, плотность 1000 кг/м<sup>3</sup> и скорость звука 1500 м/сек. Для грунта плотности 2500 кг/м<sup>3</sup> скорости продольных и поперечных волн брались равными соответственно 6500 м/сек и 3700 м/сек. Плотность включения была взята равной 2000 кг/м<sup>3</sup>. Скорость распространения волны составляла 4000 м/сек и 1250 м/сек. Постановка задачи изображена на фиг. 9. На рис. 10 представлена волновая картина в момент времени 0.195 сек.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено сравнение волновых процессов и получаемых сейсмограмм, возникающих в ходе сейсмической разведки в условиях Арктического шельфа, при численном моделировании геологических пород линейно-упругой средой и акустической средой. При численном моделировании геологических сред путем решения системы, описывающей акустическое поле, в отличие от моделирования путем решения системы, описывающей линейно-упругие среды, отсутствуют

- волны Стоунли;
- поперечные волны в геологических породах, возникшие при прохождении в их толщу продольных волн от расположенного вблизи поверхности воды источника;
- отраженные от верхней и нижней границы резервуара обменные PS-волны;

— отраженные от верхней и нижней границы резервуара SS-волны;  
 — отраженные от верхней и нижней границы резервуара обменные SP-волны;  
 — отклики от вышеперечисленных отраженных от резервуара волн в толще воды. Данные отклики также сказываются на различии сейсмограмм, показывающих вертикальную компоненту скорости.

Также рассмотрена задача о влиянии ледовых образований, на примере айсбергов, на возникающие в ходе сейсморазведки в условиях Арктического шельфа волновые процессы. Для численного моделирования использовался сеточно-характеристический метод, позволяющий корректно описывать волновые процессы в исследуемых задачах, а также корректно находить решение на границах и контактных границах области интегрирования. В работе совместно решаются система, описывающая линейно-упругие среды, и система, описывающая акустические среды.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goodway W., Enachescu M.* Introduction to this special section: Arctic/ATC // *The Leading Edge*. 2013. V. 32. No 5. P. 522–523.
2. *Baggeroer A.B., Duckworth G.L.* Seismic exploration in the Arctic Ocean // *Seismic Exploration in the Arctic Ocean*. 1983. V. 2. No 10. P. 22–27.
3. *Henley D.C.* Attenuating the ice flexural wave on arctic seismic data // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. 2006. P. 2757–2761.
4. *Trupp R., Hastings J., Cheadle S., Vesely R.* Seismic in arctic environs: meeting the challenge // *The Leading Edge*. 2009. V. 28. No 8. P. 936–942.
5. *Mosher D.C., Chapman C.B., Shimeld J., Jackson H.R., Chian D., Verhoef J., Hutchinson D., Lebedeva-Ivanova N., Pederson R.* High Arctic marine geophysical data acquisition // *The Leading Edge*. 2013. V. 32. No 5. P. 524–536.
6. *Rice S.L., Dudley T., Schneider C., Pierce R.J., Horn B., Cameron S., Bloor R., Zhou Z.-Z.J.* Arctic seismic acquisition and processing // *The Leading Edge*. 2013. V. 32. No 5. P. 546–554.
7. *Julian B.R., Gubbins D.* Three-dimensional seismic ray-tracing // *J. Geophys.* 1977. V. 43. P. 95–113.
8. *Bermudez A., Hervella-Nieto L., Rodriguez R.* Finite element computation of three-dimensional elastoacoustic vibrations // *J. Sound and Vibration*. 1999. V. 219. No 2. P. 279–306.
9. *Kazer M., Dumbser M.* A highly accurate method for complex interfaces between solids and moving fluids // *Geophysics*. 2008. V. 73. No 3. P. 723–725.
10. *Van Vossen R., Robertsson J.O.A., Chapman C.H.* Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration // *Geophysics*. 2002. V. 67. No 2. P. 618–624.
11. *De la Puente J., Kaser M., Dumbser M., Igel H.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes IV: Anisotropy // *Geophysical Journal International*. 2007. V. 169. P. 1210–1228.
12. *Seriani G., Priolo E., Carcione J.M., Padovani E.* High-order spectral element method for elastic wave modeling // 62nd Annual International Meeting and Exposition, SEG, Extended Abstracts. 1992. P. 1285–1288.
13. *Levander A.* Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // *Geophysics*. 1988. V. 53. No 11. P. 1425–1436.
14. *Vlastos S., Liu E., Main I.G., Li X.-Y.* Numerical simulation of wave propagation in media with discrete distributions of fractures: effect of fracture size and spatial distributions // *Geophysical Journal International*. 2003. V. 152. No 3. P. 649–668.
15. *Favorskaya A.V., Petrov I.B., Sannikov A.V., Kvasov I.E.* Grid-characteristic method using high order interpolation on tetrahedral hierarchical meshes with a multiple time step // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013. V. 5. No 5. P. 409–415.
16. *Фаворская А.В., Петров Д.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Численное решение арктических задач с помощью сеточно-характеристического метода // *Изв. ЮФУ. Техн. науки*. 2014. Вып. 12. С. 192–200.
17. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. No 10. С. 1709–1720.
18. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
19. *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1984. Т. 24. No 5. С. 722–739.
20. *Петров И.Б., Холодов А.С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1984. Т. 24. No 8. С. 1172–1188.
21. *Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С.* Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1990. Т. 30. No 8. С. 1237–1244.

22. Квасов И.Е., Петров И.Б. Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в задачах сейсморазведки на высокопроизводительных ЭВМ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 2. С. 330–341.
23. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд. “Мир”, 1975.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Москва: Наука, 1987.
25. Favorskaya A.V., Petrov I.B., Beklemysheva K.A. Numerical simulation of processes in solid deformable media in the presence of dynamic contacts using the grid-characteristic method // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V. 6. № 3. P. 294–304.
26. Голубев В.И. Методика отображения и интерпретации результатов полноволновых сейсмических расчетов // Тр. МФТИ. 2014. Т. 6. № 1. С. 154–161.