

УДК 519.634

Памяти О.М. Белоцерковского посвящается

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ: СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТРЕХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ<sup>1)</sup>

© 2016 г. В. А. Бирюков, В. А. Мириха, И. Б. Петров, Н. И. Хохлов

(141700 М.о., Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ)

e-mail: [biryukov.vova@gmail.com](mailto:biryukov.vova@gmail.com); [vlad.miryaha@gmail.com](mailto:vlad.miryaha@gmail.com); [petrov@mipt.ru](mailto:petrov@mipt.ru); [k\\_h@inbox.ru](mailto:k_h@inbox.ru)

Поступила в редакцию 09.11.2015 г.

Проводится сравнение результатов расчетов волновых процессов в гетерогенных средах сеточно-характеристическим методом на структурированных прямоугольных и неструктурных треугольных сетках, а также разрывным методом Галеркина на неструктурных треугольных сетках для решения линейной системы уравнений упругости в контексте прямых задач сейсморазведки на примере модели антиклинальной ловушки. Демонстрируется приемлемое количественное совпадение получаемых синтетических сейсмограмм. Для сеточно-характеристического метода на структурированных расчетных сетках требуется большее число расчетных узлов для аппроксимации криволинейных границ, что компенсируется высокой скоростью счета, делая его более предпочтительным для данного класса задач. Библ. 40. Фиг. 6. Табл. 2.

**Ключевые слова:** сеточно-характеристический метод, разрывный метод Галеркина, задачи сейсморазведки.

**DOI:** 10.7868/S0044466916060089

### ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование распространения волн в геологических средах с последующим анализом синтетических сейсмограмм крайне важно при планировании геологоразведочных работ и интерпретации полученных полевых данных, а также является неотъемлемой частью решения задач инверсии и миграции. На данный момент известно большое число различных подходов, классификация которых представлена в ряде обзоров (см., например, [1–4]). Важным критерием является высокий порядок численного метода решения полной системы дифференциальных уравнений (обычно линейной упругости, см. [5]), который обеспечивает низкую численную вязкость, что необходимо для распространения волн на расстояния порядка сотен и тысяч своих длин без искажения фронта. Поэтому в вычислительной геофизике обычно применяются разновидности конечно-разностного (FDM) и спектрального методов (SEM), а также разрывный метод Галеркина (DGM) (см. [6–9]). Примеры расчетов с помощью сеточно-характеристического метода на структурированных и неструктурных сетках приведены в [10–14].

В данной работе на примере геологической двумерной модели антиклинальной ловушки, рассмотренной в [1], сравниваются три численных метода:

- разрывный метод Галеркина (DGM) на неструктурных сетках (см. [8], [15]);
- сеточно-характеристический метод на неструктурных треугольных сетках (GCM Unstructured) (см. [16], [17]);
- сеточно-характеристический метод сквозного счета на структурированных сетках (GCM Structured) (см. [18], [19]).

Целью сравнения является взаимная верификация реализаций численных методов и демонстрация возможности решения двумерных задач прямого моделирования в сейсморазведке для постановок, близких к промышленным (диапазон частот 10–80 Гц). Сравниваются как сейсмо-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 14-11-00263).

граммы, так и отдельные сейсмотрассы, а также затрачиваемое на расчет время и объем потребляемой памяти.

В качестве геологической модели выбрана антиклинальная ловушка из [1]. Также часто для сравнения выбираются модели Marmousi (см. [20]), Marmousi2 (см. [21]) и модель соляного купола SEG/EAGE.

Подобные сравнения редко встречаются в литературе и обычно сопоставляют не более двух численных методов. Обычно в работах, касающихся DGM и его модификаций, верификация и сравнение в плане точности результатов производится с SEM (см. [7], [22–24]). В [6] сопоставление SEM и DGM показывает сравнимое время на одну степень свободы при несколько большем их количестве в случае DGM. В [25] сравниваются три численных метода (FDM, SEM, Kirchhoff method) в контексте задач морской сейсморазведки со сложной формой дневной поверхности. В [26] сравнивают четыре метода (FDM, FEM, SEM и DGM) для моделирования распространения сейсмических волн при землетрясениях для различных отношений скоростей распространения продольных и поперечных волн в среде ( $c_p/c_s$ ).

## 1. ОПИСАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Для описания поведения среды использовалась модель идеального изотропного линейно-упругого материала из [5]. Приведенная ниже система дифференциальных уравнений в частных производных описывает состояние элементарного объема упругого материала в приближении малых деформаций для двумерного случая:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, & \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;  $v_x$  и  $v_y$  – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости частиц среды;  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  – компоненты тензора напряжения.

Данную систему можно переписать в матричной форме:

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} + A_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial x} + B_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор из 5 независимых переменных  $\mathbf{u} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, v_x, v_y)^T$ . Явный вид матриц  $A_{pq}, B_{pq}$  представлен в [27]. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Собственные значения матриц  $A_{pq}$  и  $B_{pq}$  таковы:  $s_1 = -c_p, s_2 = -c_s, s_3 = 0, s_4 = c_s, s_5 = c_p$ , где  $c_p$  и  $c_s$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в среде. Приведем краткое описание сравниваемых численных методов.

### 1.1. Разрывный метод Галеркина

Будем считать, что область интегрирования разбита на треугольные ячейки  $T^{(m)}$  и матрицы  $A_{pq}$  и  $B_{pq}$  постоянны внутри  $T^{(m)}$ . В каждой ячейке решение системы (1) численно аппроксимируется линейной комбинацией из  $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$  не зависящих от времени полиномиальных функций  $\Phi_k(x, y)$  степени не выше  $N$ , образующий базис с носителем  $T^{(m)}$  и зависящих от времени коэффициентов:

$$\hat{u}_{pl}^{(m)}(t) : (u_h^{(m)})_p(x, y, z) = \hat{u}_{pl}^{(m)}(t) \Phi_l(x, y). \quad (2)$$

После умножения (1) на базисную функцию  $\Phi_k$  проинтегрировав по треугольнику  $T^{(m)}$ , получаем:

$$\int_{T^{(m)}} \Phi_k \frac{\partial(u_h)_p}{\partial t} dV + \int_{T^{(m)}} \Phi_k \left( A_{pq} \frac{\partial(u_h)_q}{\partial x} + B_{pq} \frac{\partial(u_h)_q}{\partial y} \right) dV = 0. \quad (3)$$

Далее, применив формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int_{T^{(m)}} \Phi_k \frac{\partial(u_h)_p}{\partial t} dV + \sum_{j=1}^3 \int_{(\partial T^{(m)})_j} \Phi_k F_p^{h,j} dS - \int_{T^{(m)}} \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} A_{pq}(u_h)_q + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} B_{pq}(u_h)_q \right) dV = 0. \quad (4)$$

Второе слагаемое появилось ввиду разрывности решения  $u_h$  и матриц  $A_{pq}$ ,  $B_{pq}$  на границе треугольника  $T^{(m)}$  в общем случае. Здесь  $F_p^{h,j}$  – численный поток через  $j$ -е ребро треугольника в глобальной системе координат, а через  $(\partial T^{(m)})_j$  обозначены стороны треугольника  $T^{(m)}, j = 1, 2, 3$ .

Пусть  $T_{pq}^{m_j}$  – матрица перехода в систему координат  $X Y$  (преобразование ортогонально), связанную с  $j$ -м ребром треугольника  $T^{(m)}$ . Тогда поток  $F_p^{h,j}$  можно найти приближенно:

$$F_p^{h,j} = T_{pq}^{m_j} A_{qi} u_l^\downarrow, \quad (5)$$

где  $u_l^\downarrow$  – решение одномерной задачи Римана, которое можно получить аналитически, применяя для каждой характеристики условие скачка Ранкина–Гюгонио (Rankine–Hugoniot jump condition) и учитывая непрерывность скорости и плотности сил на контакте в случае контактного условия слипания. На контакте также можно задать условия проскальзывания и сухого трения.

Объединение выражений (2), (4), (5) завершает построение полудискретной численной схемы, более подробный вывод которой приведен в [28–30]. Дальнейшую дискретизацию по времени можно произвести с помощью метода Рунге–Кутты высокого порядка точности. Метод полностью локальный и хорошо подходит для распараллеливания. В качестве системы базисных полиномов в работе используются ортогональные полиномы Дубинера 5-го порядка, а в качестве интегратора – метод Дорманда–Принца 5-го порядка с адаптивным шагом.

### 1.2. Сеточно-характеристический метод на неструктурных расчетных сетках

Применяя покоординатное расщепление, можно свести задачу построения разностной схемы для системы уравнений (1), к задаче построения разностной схемы для системы вида

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} + A_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

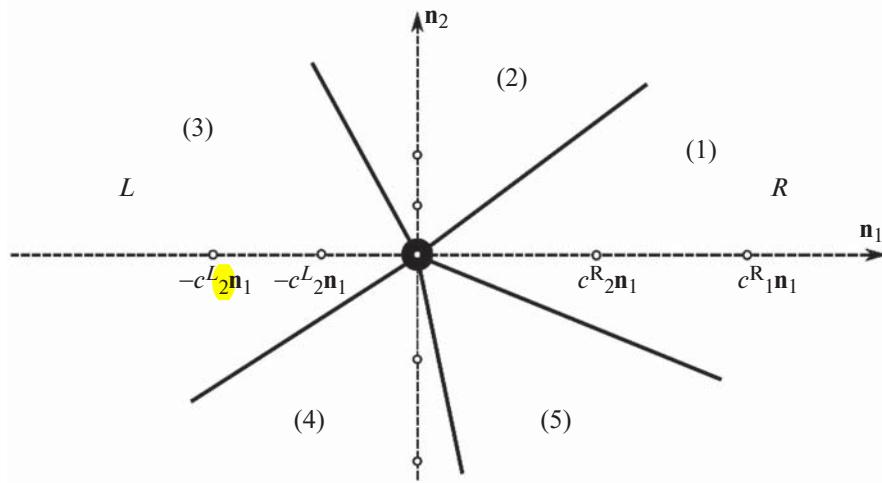
Для гиперболической системы уравнений (6) матрицу  $\mathbf{A}$  можно представить в виде  $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{R}^{-1}$ , где  $\Lambda$  – диагональная матрица, элементы которой – собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ , а  $\mathbf{R}$  – матрица, состоящая из правых собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ . Введем новые переменные:  $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$  (так называемые инварианты Римана). Тогда система уравнений (6) сводится к системе из 5 независимых скалярных уравнений переноса. Чтобы получить решение уравнения переноса в точке  $(x_m, y_m)$  в момент времени  $t_n$ , необходимо провести через эту точку соответствующую характеристику и найти точку пересечения  $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$  этой характеристики с предыдущим времененным слоем ( $t = t_{n-1}$ ). Так как вдоль характеристики решение остается неизменным, далее остается только аппроксимировать решение в точке  $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$  при  $t = t_{n-1}$ .

Существует несколько способов интерполяции в треугольнике, применяемых в теории сеточно-характеристических методов. Простейший способ заключается в выделении необходимого количества дополнительных точек на границах или внутри треугольника и интерполяции по этим точкам с помощью полинома  $N$ -го порядка (см. [31]). При этом для интерполяции выше первого порядка может потребоваться монотонизация (подробнее о способах монотонизации см. в [32]).

После того как значения инвариантов Римана на следующем шаге по времени найдены, восстанавливается решение:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{R}\mathbf{w}^{n+1}. \quad (7)$$

Обычно для обработки контактов в теории сеточно-характеристических методов используют метод явного выделения границ (см. [33], [34]). В данной работе использовался сеточно-характеристический метод со сквозным счетом. Этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению с методом явного выделения границ, в частности, используя его, можно проще и быстрее проводить моделирование сред, содержащих большое количество контактных границ.



**Фиг. 1.** Схема сеточно-характеристического метода со сквозным счетом на неструктурной (треугольной) сетке. Физические параметры соседних треугольников в общем случае различны. Обозначены места пересечения характеристик с предыдущим времененным слоем.

Приведем алгоритм вычисления уравнений переноса на треугольных сетках сеточно-характеристическим методом со сквозным счетом. В этом случае соседние ячейки могут иметь различные физические параметры, поэтому необходимо вводить специальные комбинированные матрицы перехода к инвариантам Римана, учитывающие характеристики обеих контактирующих ячеек. Обозначим ячейку, в которую попадают характеристики с положительными собственными значениями, и все параметры (включая матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{R}$ ), ей соответствующие, за  $R$ . Таким образом, ячейку, в которую попадают характеристики с отрицательными собственными значениями, обозначим через  $L$  (фиг. 1).

Расчетный шаг можно разбить на три этапа.

1. Находим инварианты Римана с помощью комбинированной матрицы  $\mathbf{R}^{-1}$ :  $\mathbf{w}_m^n = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_m^n$ .
2. Аппроксимируем значения для инвариантов Римана в четырех точках:  $c_1\mathbf{n}_1$ ,  $c_2\mathbf{n}_1$ ,  $c_1\mathbf{n}_2$ ,  $c_2\mathbf{n}_2$ . Получаем  $\mathbf{w}_m^{n+1}$ .

3. Находим  $\mathbf{u}_m^{n+1}$  с помощью комбинированной матрицы  $\mathbf{R}$ :  $\mathbf{u}_m^{n+1} = \mathbf{u}_m^n + \mathbf{R}(\mathbf{w}_m^{n+1} - \mathbf{w}_m^n)$ .

Согласно [35] используем комбинированную матрицу  $\mathbf{R}^{-1}$  со строками, определяющими той ячейкой, в которую попадает соответствующая характеристика:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_{\lambda=0}^0 \\ \mathbf{l}_{\lambda=-c_2}^L \\ \mathbf{l}_{\lambda=c_2}^R \\ \mathbf{l}_{\lambda=-c_1}^L \\ \mathbf{l}_{\lambda=c_1}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3^0/c_1^0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/(2c_{1L}\rho_L) & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/(2c_{1R}\rho_R) & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2c_{2L}\rho_L) & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/(2c_{2R}\rho_R) & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{l}_i^L$  – левые собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}_L$ , а  $\mathbf{l}_i^R$  – левые собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}_R$ . Также было введено обозначение  $c_3 = (c_1^2 - 2c_2^2)/c_1$ . Здесь присутствуют величины  $c_1^0$ ,  $c_3^0$  – некие аппроксимации физических параметров в заданной точке, а не в ячейке. В работе эти величины аппроксимируются следующим образом:  $c_1^0 = (c_{1L} + c_{1R})/2$  и  $c_2^0 = (c_{2L} + c_{2R})/2$ . Матрица перехода от инвариантов Римана к исходным переменным находится обращением матрицы (8).

К сожалению, эффективные устойчивые сеточно-характеристические схемы выше второго порядка известны только на структурных сетках.

### 1.3. Сеточно-характеристический метод сквозного счета на структурных сетках

Реализация сеточно-характеристического метода на структурных сетках во многом аналогична реализации на неструктурных сетках. Путем покоординатного расщепления решение системы уравнений (1) сводится к последовательному решению одномерных систем вида (6). Затем осуществляется переход к инвариантам Римана аналогично тому, как описано выше. В результате задача сводится к решению одномерных уравнений переноса. Для численного интегрирования одномерных уравнений переноса использовались сеточно-характеристические схемы, принцип построения которых описан в [32].

В программе реализованы схемы от второго до четвертого порядка точности, большинство расчетов проводилось при использовании схемы третьего порядка точности.

Приведем ее для численного решения одномерного линейного уравнения переноса  $u_t + au_x = 0$ ,  $a > 0$ ,  $\sigma = at/h$ ,  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по координате:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_m^n + \sigma(\Delta_0 + \Delta_2)/2 + \sigma^2(\Delta_0 - \Delta_2)/2 + \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{6}(\Delta_1 - 2\Delta_0 + \Delta_2), \\ \Delta_0 &= u_{m-1}^n - u_m^n, \\ \Delta_1 &= u_{m-2}^n - u_{m-1}^n, \\ \Delta_2 &= u_m^n - u_{m+2}^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Схема (9) устойчива для чисел Куранта, не превышающих единицы, имеет третий порядок точности по координате и времени. Для монотонизации используется сеточно-характеристические критерии монотонности (см. [32]), опирающийся на характеристическое свойство точного решения:

$$\min(u_{m-1}^n, u_m^n) \leq u_m^{n+1} \leq \max(u_{m-1}^n, u_m^n).$$

В местах выполнения данного критерия порядок схемы падает до второго.

После численного интегрирования уравнений переноса переход к физическим переменным исходной системы происходит путем домножения инвариантов Римана на матрицу, обратную к (8). Переход к инвариантам Римана и возврат к исходным переменным происходит на каждой итерации интегрирования по времени.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

### 2.1. Постановка

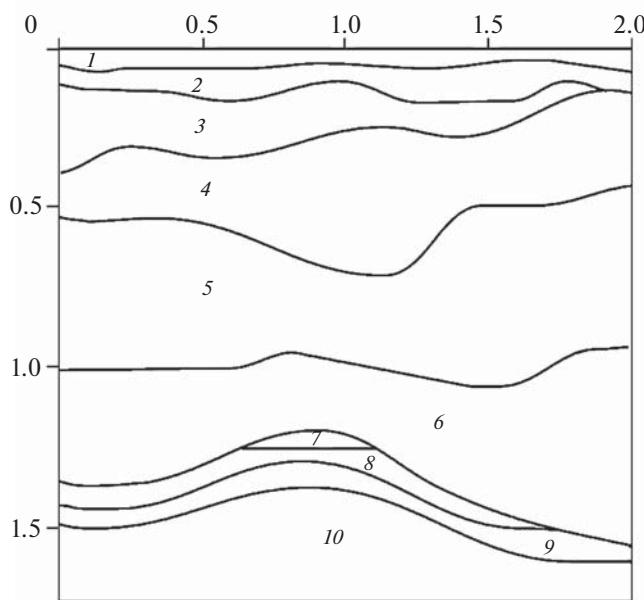
В качестве исходной геологической модели была выбрана модель антиклинальной ловушки из [1], как типовой углеводородной залежи, приведенная на фиг. 2, включающая в себя большое количество контактных поверхностей. Вследствие этого на сейсмограмме получаются кратные волны, которые необходимо отделять от полезного сигнала, что становится фактически невозможным при низких порядках численных схем. Размеры области указаны в километрах. Параметры слоев предоставлены в табл. 1.

На нижней и боковых границах устанавливалось неотражающее граничное условие, на верхней – свободная граница. В качестве источника возмущения использовалась вертикальная сила, приложенная к площадке с 925.7 м по 974.1 м на дневной поверхности, амплитуда которой описывалась импульсом Рикера частоты 40 Гц.

Запись данных сейсмических приемников проводилась на глубине 40 см от дневной поверхности (99 приемников, расположенных равномерно с 20 м по 1980 м). Для более детального сравнения выбиралась 47-я сейсмопротрасса (нумерация с 1) в точке  $x = 940$  м.

### 2.2. Сравнение результатов

Расчетные сетки строились путем моделирования волн в диапазоне 10–80 Гц. При этом минимальная длина волны, а следовательно и мелкость расчетной сетки, определялась соотношением  $\lambda_{\min} = V_{\min}/f_{\max} = 1.6 \times 10^3/80 = 20$  м. Дискретизация расчетной области выбиралась исходя из того, чтобы на длину волны приходилось минимум 5–10 расчетных точек (см. [36], [37]). Расчетные сетки для всех трех методов строились равномерными, исходя из данных требований. Например, для DGM при пятом порядке полиномов достаточно  $\approx 2 \times 10^4$  треугольников (при пяти



Фиг. 2. Геологическая модель антиклинальной ловушки.

точках на длину волны) без учета ограничений на геометрию слоев задачи. С учетом геометрии число треугольников возрастало до  $\approx 4 \times 10^4$ . Для GCM Unstructured второго порядка использовалось  $\approx 1.5 \times 10^6$  треугольников. Для GCM Structured равномерная по обеим осям расчетная сетка состояла из  $2000 \times 1722$  или всего из  $\approx 3.4 \times 10^6$  ячеек.

В табл. 2 приведены затраченные времена на проведение расчета каждым из методов. Все характеристики нормированы на число степеней свободы, чтобы можно было более объективно сравнить методы, порядки которых отличаются. Поясним на примере способ вычисления времени обработки одной степени свободы для DGM: на один шаг алгоритма интегрирования Рунге–Кутты четвертого порядка, для шестого порядка полиномов, на одном ядре процессора Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620 v2 @ 2.1GHz, для 98916 треугольников затрачивается 6.7 сек. Тогда, нормировав время шага на число стадий интегрирования, число степеней свободы на ячейку  $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ , число ячеек и количество ядер, получаем  $6 \times 10^{-1}$  мксек. для GCM Structured тре-

Таблица 1. Параметры слоев геологической модели

Слой	Параметры		
	$c_p$ (км/сек)	$c_s$ (км/сек)	$\rho$ (г/см <sup>3</sup> )
1	2.6	1.6	2.1
2	3.2	1.96	2.3
3	3.7	2.26	2.3
4	4	2.45	2.4
5	4.3	2.63	2.5
6	4.5	2.75	2.6
7	3.2	1.7	2.3
8	4.6	2.82	2.6
9	4.8	2.94	2.7
10	5.4	3.3	2.8

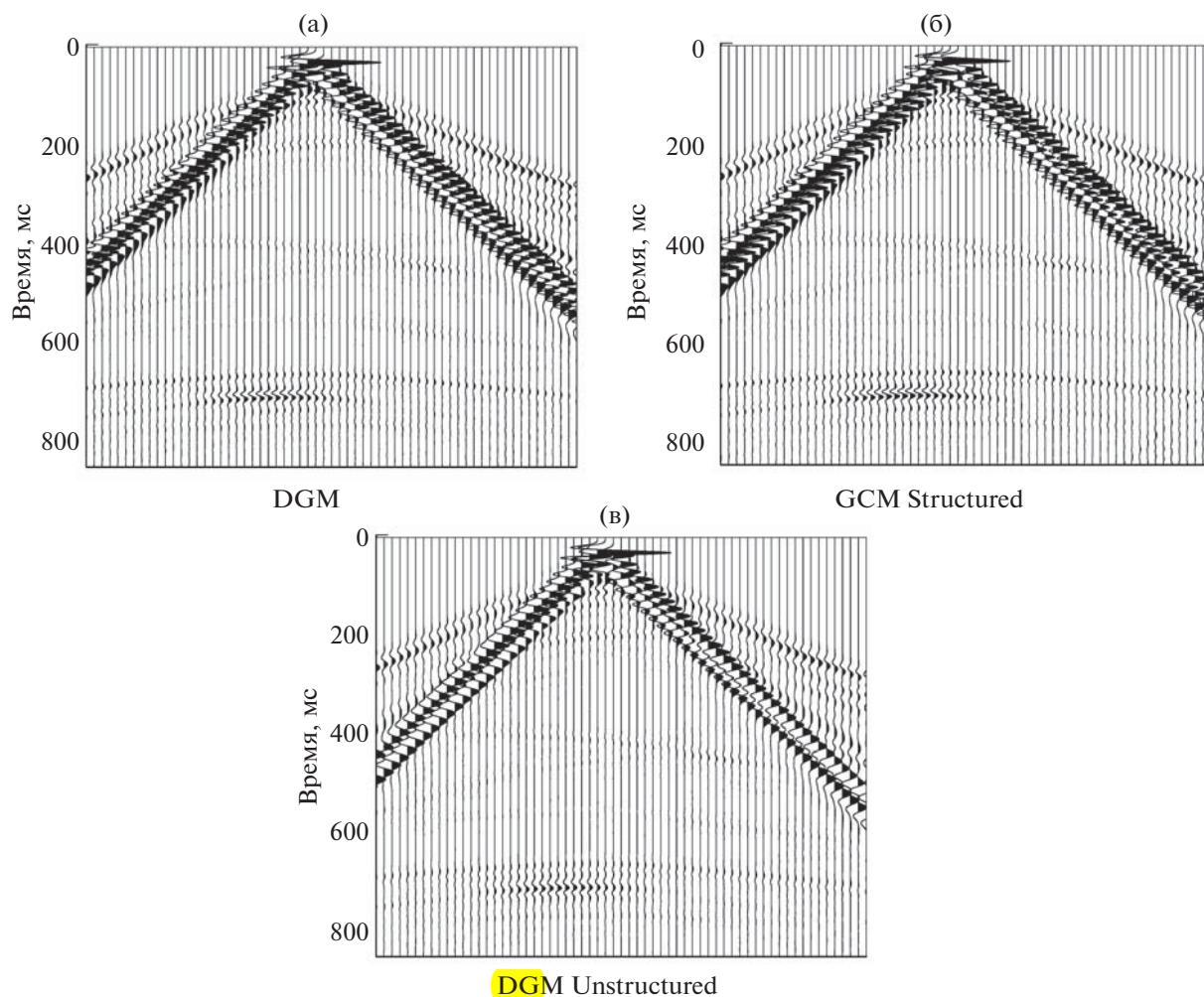
Таблица 2. Сравнение методов по потребляемым ресурсам

Метод	Время обработки одной степени свободы, мсек
GM	$6 \times 10^{-1}$
DGCM Structured	$1 \times 10^{-2}$
GCM Unstructured	6

тьего порядка нормировка проводилась на  $3^2 = 9$ , это соотносится с сеткой для схемы первого порядка, в которой будет в 9 раз больше узлов.

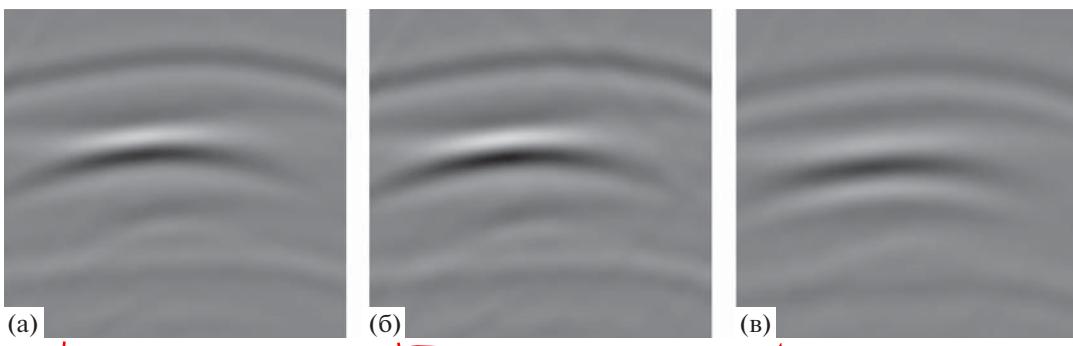
Потребляемая память не сравнивалась, так как нормированная величина для всех методов одинаковая и равна количеству неизвестных (5 шт.), умноженных на размер числа с плавающей точкой. Стоит подчеркнуть, что для достижения той же точности для DGM в сравнении с GCM необходимо несколько большее число степеней свободы ввиду того, что решение на границе ячеек разрывно и число степеней свободы, относящихся к периметру ячейки, удваивается, однако суммарный эффект от этого не существенен по сравнению с общими объемами потребляемой памяти.

Сравнивать настолько отличающиеся по своей природе численные методы затруднительно. Времена обработки одной степени свободы (см. таблицу 2) зависят не только от самого метода,

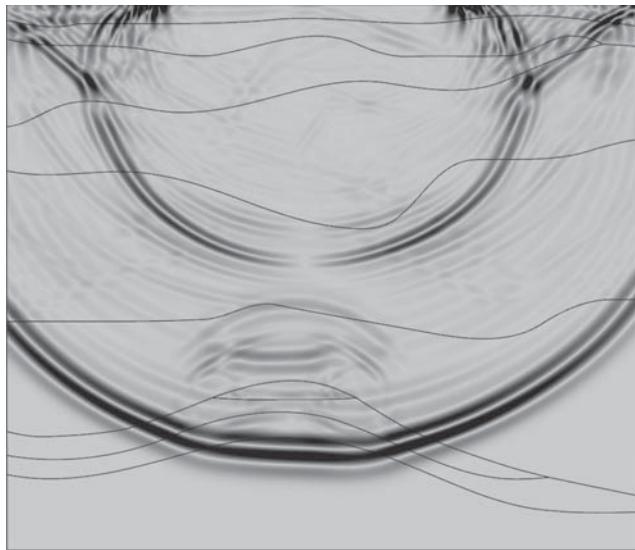


Фиг. 3. Сейсмограммы вертикальной компоненты скорости частиц, полученные с помощью разрывного метода Галеркина, сеточно-характеристического метода на структурных сетках, сеточно-характеристического метода на неструктурных сетках.

✓ DGM



**Фиг. 4.** Подробный вид отклика от антиклинальной ловушки на сейсмограммах вертикальной компоненты скорости частиц, полученных с помощью разрывного метода Галеркина, сеточно-характеристического метода на структурных сетках, сеточно-характеристического метода на неструктурных сетках.



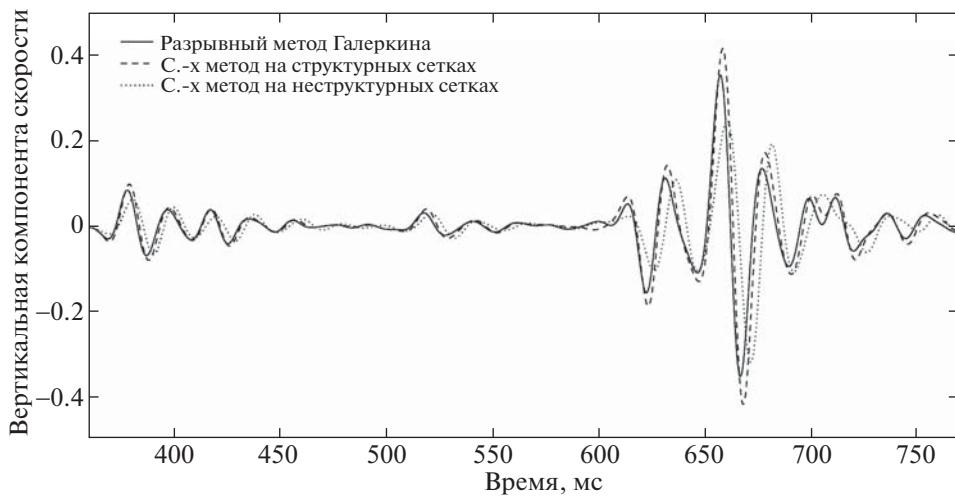
**Фиг. 5.** Волновая картина в момент времени  $t = 0.38$  сек.

но даже в большей степени от его реализации. Судя по количеству требуемых операций на одну степень свободы GCM Structured – самый быстрый, далее идет GCM Unstructured, и теоретически самым медленным должен быть DGM. К тому же у каждого из методов есть свои уникальные отличительные особенности, например, в DGM при использовании полиномов  $N$ -го порядка сходимость по координате будет иметь порядок  $N + 1$ . В GCM порядок интерполяции совпадает с порядком сходимости по координате и времени. Ограничение на шаг по времени для методов

на неструктурных сетках обычно записывается как  $\Delta t = \min_i \frac{1}{N} \frac{h_i}{c_p^i}$ , где  $h_i$  – минимальная вы-

сота  $i$ -й ячейки. Поэтому для таких методов невысокого порядка требуется меньшее число шагов интегрирования, в то время как для GCM Structured, как и для многих методов на структурных сетках, множитель  $1/N$  отсутствует. К тому же в некоторых случаях для GCM Structured можно так подобрать шаги по пространственным координатам и времени, что решение будет “переноситься” с предыдущего временного шага без интерполяции, т.е. характеристики будут попадать ровно в узлы.

На фиг. 3 представлены сейсмограммы, полученные с помощью трех методов. Качественно наблюдается полное совпадение результатов как для амплитуд, так и с точки зрения фазовых соотношений. При более детальном изучении центральной области сейсмограммы, которая несет информацию о местоположении антиклинальной ловушки (см. фиг. 4), наблюдаются небольшие отличия как в фазах регистрируемых сигналов, так и в амплитудах: максимальное отличие



Фиг. 6. Сравнение данных сейсмопротяжки в точке (940 м, −0.4 м).

во времени регистрируемых сигналов между DGM и GCM Structured составляет 1.2 мсек, а между DGM и GCM Unstructured – 3.8 мсек. Максимальное отличие в амплитудах вертикальной составляющей между DGM и GCM Structured составляет 4%, а между DGM и GCM Unstructured – 11%. Такое отличие для GCM Unstructured объясняется более низким 2-м порядком аппроксимации метода относительно остальных методов.

На фиг. 5 приведена волновая картина в момент времени  $t = 0.38$  сек. Оттенками серого показана амплитуда скорости частиц среды. В центральной области отчетливо виден отклик от антиклинальной ловушки.

На фиг. 6 приведено сравнение данных вертикальной компоненты скорости частиц с 47-й сейсмопротяжкой (датчик расположен в точке (940 м, −0.4 м)). Форма сигнала (фазовые соотношения) для DGM и GCM Structured совпадает, но наблюдается отличие в амплитуде сигналов в 15%. Максимальное отличие DGM от GCM Unstructured составляет 10%. Это связано с различием в точности рассматриваемых методов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены три численных метода высокого порядка. В ряде работ показывается, что при фиксированном уровне ошибок эффективнее с точки зрения количества потребляемых ресурсов использовать методы высокого порядка по сравнению с методами низкого порядка для более мелких расчетных сеток (см. [38]). Расчет волновой картины для модели антиклинальной ловушки показал высокую степень совпадения результатов как с точки зрения амплитуд, так и с точки зрения фаз, регистрируемых на дневной поверхности сигналов. Демонстрируется пригодность всех трех численных методов и соответствующих программных реализаций для проведения расчетов на полевых входных данных. Метод GCM Structured гораздо эффективнее благодаря меньшему числу операций на одну степень свободы и более эффективной реализации на современных ЭВМ за счет плотности данных.

Было показано, что, несмотря на дискретизацию геометрии области с помощью прямоугольных структурных расчетных сеток метод GCM Structured дает сравнимые с методами на неструктурных сетках результаты. Для этого необходимо использовать большее число расчетных узлов, что компенсируется более высокой скоростью счета. Эти результаты согласуются с выводами, полученными в [39], [40]. Тем не менее применение методов на неструктурных сетках может быть обосновано при моделировании объектов сложной структуры, где методы на структурных сетках будут давать большую погрешность аппроксимации геометрии расчетной области. Данное сравнение планируется сделать в будущих работах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carcione J.M., Herman G.C., ten Kroode A.P.E.* Y2K review article: seismic modeling // Review Literature And Arts Of The Americas. 2002. V. 67. № 4. P. 1304–1325.
2. *Virieux J., Calandra H., Plessix R.É.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging // Geophysical Prospecting. 2011. V. 59. № 5. P. 794–813.
3. *Virieux J., Etienne V. et al.* Modelling seismic wave propagation for geophysical imaging // Seismic Waves – Research and Analysis. InTech. 2012. P. 253–304.
4. *Moczo P., Kristek J., Galis M.* The finite-difference modelling of earthquake motions: waves and ruptures. Cambridge Univ. Press., 2014.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
6. *Etienne V., Chaljub E. et al.* An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3D elastic wave modelling // Geophys. J. Int. 2010. V. 183. № 2. P. 941–962.
7. *Hermann V., Käser M., Castro C.E.* Non-conforming hybrid meshes for efficient 2-D wave propagation using the discontinuous Galerkin method // Geophysical Journal International. 2011. V. 184. № 2. P. 746–758.
8. *Миряха В.А., Санников А.В., Петров И.Б.* Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 3. С. 96–108.
9. *Mercerat E.D., Glinsky N.* A nodal high-order discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation in arbitrary heterogeneous media // Geophysical J. Internat. 2015. V. 201. № 2. P. 1099–1116.
10. *Челноков Ф.Б.* Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 6. С. 96–108.
11. *Kvasov I.E., Pankratov S.A., Petrov I.B.* Numerical simulation of seismic responses in multilayer geologic media by the grid-characteristic method // Mathematical Models and Computer Simulations. 2011. V. 3. № 2. P. 196–204.
12. *Petrov I.B., Favorskaya A.V. et al.* Grid-characteristic method using high-order interpolation on tetrahedral hierarchical meshes with a multiple time step // Mathematical Models and Computer Simulations. 2013. V. 5. № 5. P. 409–415.
13. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Моделирование волновых процессов внутри планеты с помощью гибридного сеточно-характеристического метода // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 139–148.
14. *Golubev V.I., Petrov I.B. et al.* Numerical computation of wave propagation in fractured media by applying the grid-characteristic method on hexahedral meshes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55. № 3. P. 509–518.
15. *Petrov I.B., Favorskaya A.V. et al.* Monitoring the state of the moving train by use of high performance systems and modern computation methods // Mathematical Models and Computer Simulations. 2015. V. 7. № 1. P. 51–61.
16. *Kvasov I.E., Petrov I.B.* High-performance computer simulation of wave processes in geological media in seismic exploration // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 52. № 2. P. 302–313.
17. *Квасов И.Е., Левянт В.Б., Петров И.Б.* Численное моделирование прямых откликов от пластовых зон с субвертикальными флюидонасыщенными мезотрешинами // Технологии сейсморазведки. 2013. № 3. Р. 19–35.
18. *Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I.* Numerical simulation of seismic activity by the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. V. 53. № 10. P. 1523–1533.
19. *Petrov I.B., Khokhlov N.I.* Modeling 3D seismic problems using high-performance computing systems // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V. 6. № 4. P. 342–350.
20. *Versteeg R.* The Marmousi experience: velocity model determination on a synthetic complex data set // The Leading Edge. 1994. V. 13. P. 927–936.
21. *Martin G. S., Wiley R., Marfurt K.J.* Marmousi2: An Elastic Upgrade for Marmousi // The Leading Edge. 2006. V. 25. № 2. P. 156–166.
22. *De Basabe J.D., Sen Mrinal K.* New developments in the finite-element method for seismic modeling // The Leading Edge. 2009. V. 28. № 5. P. 562–567.
23. *Castro C.E., Käser M., Brietzke G.B.* Seismic waves in heterogeneous material: Subcell resolution of the discontinuous Galerkin method // Geophysical J. Internat. 2010. V. 182. № 1. P. 250–264.
24. *Wenk S., Pelties C. et al.* Regional wave propagation using the discontinuous Galerkin method // Solid Earth. 2013. V. 4. № 1. P. 43–57.
25. *Robertsson J., Laws R. et al.* Modelling of scattering of seismic waves from a corrugated rough sea surface: a comparison of three methods // Geophysical J. Internat. 2006. V. 167. № 1. P. 70–76.
26. *Moczo P., Kristek J. et al.* 3-D finite-difference, finite-element, discontinuous-Galerkin and spectral-element schemes analysed for their accuracy with respect to P-wave to S-wave speed ratio // Geophysical J. Internat. 2011. V. 187. № 3. P. 1645–1667.

27. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2002.
28. *Käser M., Dumbser M.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – I. The two-dimensional isotropic case with external source terms // *Geophysical J. Internat.* 2006. V. 166. № 2. P. 855–877.
29. *Миряха В.А., Санников А.В., Петров И.Б.* Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина // *Матем. моделирование.* 2015. Т. 27. № 3. С. 96–108.
30. *Wilcox L., Stadler G. et al.* A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic-acoustic media // *Journal Comput. Phys.* 2010. V. 229. № 24. P. 9373–9396.
31. *Агапов П.И., Челноков Ф.Б.* Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела // *Моделирование и обработка информации:* Сб. ст. 2003. С. 19–27.
32. *Холодов А.С., Холодов Я.А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667.
33. *Квасов И.Е., Панкратов С.А., Петров И.Б.* Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом // *Матем. моделирование.* 2010. Т. 22. № 9. С. 13–22.
34. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 10. Р. 1709–1720.
35. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов Ю.А.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
36. *Komatitsch D.* The spectral-element method in seismology // *Geophysical Monograph Series.* 2005. V. 157. P. 205–227.
37. *De Basabe J.D., Sen Mrinal K.* Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations // *Geophysics.* 2007. V. 72. № 6. P. T81–T95.
38. *Käser M., Dumbser M.* A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids // *Geophysics.* 2008. V. 73. № 3. P. T23.
39. *Pelties C., Käser M.* Regular versus irregular meshing for complicated models and their effect on synthetic seismograms // *Geophys. J. Int.* 2010. V. 183. № 2. P. 1031–1051.
40. *Bona G., Awruchb M.A.* Numerical study between structured and unstructured meshes for euler and navier-stokes equations // *Mecanica Computational.* 2007. V. 26. P. 3134–3146.