МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 год, том 28, номер 2, стр. 123-132

КОМПАКТНЫЕ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

© *2016 г.* ***В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов***

Московский физико-технический институт (государственный университет)
w.golubev@mail.ru

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.575.21.0084 от 20 октября 2014 года (уникальный идентификатор ПНИ: RFMEFI57514X0084), выполняемого в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Рассматривается численное решение трёхмерного линейного уравнения переноса на параллелепипедных расчётных сетках. С использованием подхода расщепления по координатам проведено обобщение компактных сеточно-характеристических схем повышенного порядка точности на трёхмерный случай. Исследуется влияние отдельных шагов вычислительного алгоритма на точность итоговой схемы. Предложен подход, позволяю-щий сохранить порядок сходимости схемы на гладком решении и минимизировать нефизические осцилляции на разрывном решении в трёхмерном случае.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, компактные схемы, численный сеточно-характеристический метод, уравнение переноса.

COMPACT GRID-CHARACTERISTIC SCHEMES OF HIGHER ORDERS FOR 3D LINEAR TRANSPORT EQUATION

V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov

Moscow Institute of Physics and Technology

A numerical solution of 3D linear transport equation on parallelepiped grids is described. With the usage of split along coordinate axis technique compact grid-characteristic schemes of higher orders were generalized up to 3D case. The influence of separate steps of the algorithm on the precision of the final scheme was estimated. The approach for preserving the convergence order of scheme on smooth solution and minimize unphysical oscillations on discontinuous solution in 3D was proposed.

Keywords: computer simulation, compact schemes, numerical grid-characteristic method, transport equation.

1. Введение

Многие динамические процессы в механике сплошных сред (механика деформируемого твердого тела, акустика, аэродинамика и др.) могут быть математически описаны гиперболической системой уравнений [1]. Простейшим примером уравнения данного типа является линейное уравнение переноса. Получение аналитического решения для

большинства прикладных задач не представляется возможным, в связи с чем активно развиваются разностные методы численного решения подобных задач.

Поскольку численное решение сходится к точному решению при измельчении расчётной сетки, актуальной задачей является повышение порядка аппроксимации схем. Из распространённых подходов отметим следующие: расширение сеточного шаблона [2], использование комбинаций сеточных функций, полученных на разных сетках, использование дифференциальных следствий начальных уравнений [3-5]. Для обеспечения монотонности схем, например, на разрывных решениях, используют лимитеры [6]. Схемы, построенные без расширения сеточного шаблона, принято называть компактными [7,8]. К их преимуществам можно отнести локальность, облегчающую формулирование граничных условий.

В [9] была предложена бикомпактная (на двухточечном шаблоне) схема третьего порядка CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-particle method), построенная с использованием интерполяционных полиномов. В дальнейшем она была обобщена на многомерный случай [10]. Отметим, однако, что указанная схема не является монотонной и приводит к нефизическим осцилляциям на разрывном решении. Для преодоления данного недостатка в [11] были предложены две бикомпактные схемы (БИС1 и БИС2) для одномерного линейного уравнения переноса, построенные на основе сеточно-характеристического метода [12]. На гладких решениях они демонстрируют, соответственно, второй и третий порядок сходимости как по пространству, так и по времени. При этом с использованием гибридизации решения [13] на основе сеточно-характеристического критерия [14] и на основе критерия, основанного на поиске экстремума интерполяционного полинома на выбранном интервале, предложенного в [11], удалось добиться отсутствия нефизических осцилляций и слабого размытия решения со временем.

В дальнейшем в [15] они были обобщены на двумерный случай с использованием подхода расщепления по направлениям с сохранением качественного поведения и порядка аппроксимации.

В данной работе проводится обобщение схем БИС1 и БИС2 на трёхмерный случай. Используется подход расщепления по координатам, позволяющий свести задачу к последовательному решению одномерных задач. В дальнейшем проводится дополнение начальных уравнений их дифференциальными следствиями, что позволяет использовать компактные схемы. Отдельно исследуется вопрос о влиянии способа переноса ортогональной (дополнительной) производной на порядок сходимости итоговой схемы. Предложены трёхмерные численные схемы, сохраняющие повышенный порядок сходимости на гладких решениях и отсутствие нефизических осцилляций на разрывном решении.

2. Одномерное линейное уравнение переноса

Рассмотрим простейшее одномерное линейное уравнение переноса:

$$u_t + \lambda u_x = 0 . \qquad (1)$$

Будем полагать, что λ=const>0, поскольку для отрицательных λ все построения аналогичны и могут быть осуществлены заменой λ на $-\lambda$ и сеточного шаблона на симметричный по x относительно рассчитываемой точки (t^n, x_m).

Помимо уравнения (1) также рассмотрим его дифференциальное следствие. Введем в дополнение к $u(t,x)$ новую искомую функцию $\nu(t,x)=u_x(t,x)$ и, продифференцировав

уравнение (1) по x, получим для $\nu(t,x)$ аналогичное уравнение переноса:

$$\nu_t + \lambda\nu_x = 0. \tag{2}$$

Построение продолженных разностных схем будем рассматривать на двухточечном по пространству шаблоне с пространственным шагом h и временным шагом τ:

$$(t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^{n+1}, x_m). \tag{3}$$

Будем использовать систему координат, в которой точка (t^n, x_m) имеет координаты (0,0), а точка (t^n, x_{m-1}) – $(0,-h)$ соответственно. Рассмотрим на интервале $x\in(-h,0)$ интерполяционные полиномы $f(x)$, которые аппроксимируют функцию $u(x)$ на заданном интервале. В дальнейшем индекс по времени будем опускать, где это возможно. Решение уравнения (1) на временном шаге n+1 может быть найдено как

$$u_m^{n+1} = f(-\lambda\tau),$$

а решение продолженной системы будет

$$\nu_m^{n+1} = f'(-\lambda\tau).$$

На указанном шаблоне можно построить максимально полином третьей степени $F_3(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3$. Коэффициенты данного полинома могут быть найдены из значений $u_m, u_{m-1}, \nu_m, \nu_{m-1}$. Дополнительно введём полиномы второй степени $F_{2l}(x)$ и $F_{2r}(x)$, коэффициенты в которых вычислены по значениям u_{m-1}, u_m, ν_{m-1} и u_{m-1}, u_m, ν_m соответственно. Также рассмотрим полином первого порядка точности на рассматриваемом шаблоне $F_1(x)$, коэффициенты которого находятся по значениям u_m, u_{m-1}. Аппроксимация данным полиномом представляет собой схему первого порядка типа КИР (Куранта-Изаксона-Риса). Обозначим данную схему как CIR.

Введём дополнительно необходимые обозначения:

$$\nu_* = \frac{u_m - u_{m-1}}{h}, \quad \Delta_0 = |\nu_m - \nu_*|, \quad \Delta_1 = |\nu_{m-1} - \nu_*|, \quad x_0 = -\frac{b_3}{2a_3}.$$

2.1. Схема БИС1. Схема БИС1 (бикомпактная интерполяционная схема) основана на гибридизации по характеристическому критерию монотонности [3,12]:

$$\min(u_m, u_{m-1}) \le u_m^{n+1} \le \max(u_m, u_{m-1}). \tag{4}$$

Значение u_m^{n+1} последовательно вычисляется полиномами $F_3(x)$, $F_{2l}(x)$, $F_{2r}(x)$ и $F_1(x)$ до тех пор, пока не будет выполнен критерий монотонности. В дальнейшем с использованием производной выбранного полинома вычисляется значение ν_m^{n+1}.

2.2. Схема БИС2. Схема БИС2 строилась на основе анализа поведения интерполяционных полиномов на рассматриваемом интервале с целью максимального повышения порядка сходимости. Введём в рассмотрение дополнительные условия

$$\nu_m \nu_{m-1} \geq 0, \quad \nu_* \nu_m \geq 0. \tag{5}$$

$$-h \leq x_0 \leq 0, \quad F_3'(x_0)\nu_* < 0. \tag{6}$$

$$\min(v_m, v_{m-1}) \leq v_* \leq \max(v_m, v_{m-1}), \tag{7}$$

$$\nu_m \nu_{m-1} < 0. \tag{8}$$

$$\nu_m \nu_{m-1} \geq 0, \quad \nu_* \nu_m \leq 0. \tag{9}$$

Если выполнены условия (5) и (6), то используется схема второго порядка с интерполяционным полиномом $F(x)$, вычисляемым по формуле

$$F(x) = \begin{cases} F_{2l}(x), \Delta_{m-1} \leq \Delta_m, \\ F_{2r}(x), \Delta_{m-1} > \Delta_m. \end{cases} \tag{10}$$

Если выполнено (5), но не выполнено (6), то используется полином третьего порядка $F_3(x)$. Если выполнено условие (7), то используется полином первого порядка $F_1(x)$. В случае выполнения условия (8), используются полиномы второго порядка, исходя из (10). Наконец, при выполнении условия (9) используется полином первого порядка $F_1(x)$.

Приведём ниже также псевдокод расчётного алгоритма.

```
if (ν_m ν_{m-1} ≥ 0) and (ν_* ν_m ≥ 0) then
    if (x_0 > -h) and (x_0 < 0) and (F'(x_0) ν_* < 0) then
        if min(ν_m, ν_{m-1}) ≤ ν_* ≤ max(ν_m, ν_{m-1}) then
            u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_1(x), F_1'(x)
        else
            if Δ_0 > Δ_1 then
                u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_{2l}(x), F_{2l}'(x)
            else
                u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_{2r}(x), F_{2r}'(x)
            end if
        end if
    else
        u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_3(x), F_3'(x)
    end if
else if u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_{2r}(x), F_{2r}'(x) then
    u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_1(x), F_1'(x)
else
    if Δ_0 > Δ_1 then
        u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_{2l}(x), F_{2l}'(x)
```

```
            else
                u_m^{n+1}, ν_m^{n+1} = F_{2r}(x), F'_{2r}(x)
            end if
        end if
```

3. Трёхмерное линейное уравнение переноса

Рассмотрим простейшее трёхмерное линейное уравнение переноса

$$u_t + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y + \lambda_z u_z = 0 \tag{11}$$

и четырёхточечный по пространству шаблон с пространственным шагом h и временным шагом τ:

$$(t^n, x_{i-1}, y_j, z_k), (t^n, x_i, y_{j-1}, z_k), (t^n, x_i, y_j, z_{k-1}), (t^n, x_i, y_j, z_k), (t^{n+1}, x_i, y_j, z_k). \tag{12}$$

Будем полагать, что $\lambda_x = \text{const} > 0$, $\lambda_y = \text{const} > 0$ и $\lambda_z = \text{const} > 0$, поскольку для отрицательных x, y, z все построения аналогичны и могут быть осуществлены заменой $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ на $-\lambda_x, -\lambda_y, -\lambda_z$ соответственно, и сеточного шаблона на симметричный по x, y, z относительно точки (t^n, x_i, y_j, z_k).

На этапе построения разностных схем для решения уравнения (11) используем метод расщепления по координатам (X, Y и Z). При этом примем связь между оператором перехода с текущего на следующий временной слой ($\hat{F}_{3d}$) и для отдельных шагов расщепления ($\hat{F}_X$, $\hat{F}_Y$, $\hat{F}_Z$) в виде

$$\hat{F}_{3d} u_{i,j,k}^n = \hat{F}_Z \hat{F}_Y \hat{F}_X u_{i,j,k}^n. \tag{13}$$

Рассмотрим подробнее, например, шаг расщепления по X:

$$u_t + \lambda_x u_x = 0. \tag{14}$$

Для удобства записи будем обозначать значения величин, полученные после данного шага, индексом $n+1/3$ по времени, а после шага расщепления по Y – индексом $n+2/3$. Дополним уравнение (14) его следствием, получаемым дифференцированием по x и введением дополнительной неизвестной функции $\nu(t,x,y,z) = \partial u(t,x,y,z)/\partial x$:

$$\nu_t + \lambda_x \nu_x = 0. \tag{15}$$

Отметим, что система (14),(15) является продолженной и может быть решена на рассматриваемом шаблоне с использованием одной из компактных схем (CIP, БИС1 или БИС2) [11] или схемой CIR [16]. Т.о., могут быть вычислены значения $u_{i,j,k}^{n+1/3}$ и $\nu_{i,j,k}^{n+1/3}$.

Однако на следующем шаге расщепления по Y нам необходимо знать дополнительно значение $w_{i,j,k}^{n+1/3}$, где введено обозначение $w(t,x,y,z) = \partial u(t,x,y,z)/\partial y$. На шаге

расщепления по Z необходимо знать также значение $q_{i,j,k}^{n+2/3}$, где введено обозначение $q(t,x,y,z)=\partial u(t,x,y,z)/\partial z$. Для краткости в дальнейшем будем называть первую производную по координате, не совпадающей с шагом расщепления, ортогональной (или дополнительной). Так, например, на шаге расщепления по X ортогональными являются две производные: w и q. Авторами было предложено два различных способа вычисления их значений, существенно влияющих на порядок сходимости итоговой схемы.

3.1. Перенос ортогональных (дополнительных) производных схемой CIR. Дополним уравнение (14) его следствиями, получаемыми дифференцированием по y и z:

$$w_t+\lambda_x w_x=0, \tag{16}$$

$$q_t+\lambda_x q_x=0. \tag{17}$$

Будем вычислять значение $w_{i,j,k}^{n+1/3}$ на шаге расщепления по X решением уравнения (10), а $q_{i,j,k}^{n+1/3}$ – уравнения (11) по схеме первого порядка сходимости по пространству CIR:

$$w_{i,j,k}^{n+1/3}=w_{i,j,k}^{n}-\frac{\lambda_x\tau}{h}(w_{i,j,k}^{n}-w_{i-1,j,k}^{n}), \tag{18}$$

$$q_{i,j,k}^{n+1/3}=q_{i,j,k}^{n}-\frac{\lambda_x\tau}{h}(q_{i,j,k}^{n}-q_{i-1,j,k}^{n}). \tag{19}$$

Полученные компактные трёхмерные сеточно-характеристические схемы назовём CIP-3D-1, БИС1-3D-1, БИС2-3D-1, соответственно, в зависимости от используемой компактной схемы для решения продолженной системы уравнений (14),(15) и аналогичной ей на шагах расщепления по Y и Z.

3.2. Перенос ортогональных (дополнительных) производных компактной схемой. Введём в рассмотрение новую искомую функцию $p(t,x,y,z)=\dfrac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial x\partial y}$ и рассмотрим следствие уравнения (15), получаемое дифференцированием его по x:

$$p_t+\lambda_x p_x=0. \tag{20}$$

При таком подходе система уравнений (16),(20) также является продолженной. Расширим пространство искомых функций введением $r(t,x,y,z)=\dfrac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial x\partial z}$ и рассмотрим следствие уравнения (17), получаемое дифференцированием его по x:

$$r_t+\lambda_x r_x=0. \tag{21}$$

При таком подходе система уравнений (17), (21) также является продолженной. Вводя новые искомые функции $s(t,x,y,z)=\dfrac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial y\partial z}$ и $g(t,x,y,z)=\dfrac{\partial^3 u(t,x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}$ и

дифференцируя уравнение (16) сначала по z, а потом по x, получим ещё одну продолженную систему уравнений:

$$s_t + \lambda_x s_x = 0, \tag{22}$$

$$g_t + \lambda_x g_x = 0. \tag{23}$$

Каждая из трёх записанных систем на шаге расщепления по X может быть решена с использованием одной из компактных схем (CIP, БИС1 или БИС2). Таким образом, могут быть вычислены значения всех величин $u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{xyz}$ на слое $n+1/3$. На шаге расщепления по Y и по Z выражения для вычисления значений на слое $n+2/3$ и n+1 строятся полностью аналогично изложенному выше. Полученные компактные трёхмерные сеточно-характеристические схемы назовём CIP-3D-2, БИС1-3D-2, БИС2-3D-2, соответственно, в зависимости от используемой компактной схемы для решения продолженных систем уравнений. Отметим, что в настоящей работе не исследовались трёхмерные схемы, которые могут быть получены при решении систем (14),(15), (16),(20), (17),(21) и (22),(23) отличными друг от друга компактными схемами.

3.3. Численное исследование схем. Тест на качественное поведение построенных трёхмерных разностных схем проводился с импульсом прямоугольной формы:

$$u(0,x,y,z) = \begin{cases} 1, & -0.5 \le x, y, z \le 0.5, \\ 0, & else. \end{cases} \tag{24}$$

Использовалась сетка, состоящая из 20 узлов по каждой из координат и покрывающая область $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$, с периодическими граничными условиями. Решение представлено после 100 шагов разностной схемы, шаг по времени выбирался исходя из числа Куранта 0.6. Использовались значения параметров $x=1, y=2, z=3$. Результаты для всех схем (сечение области расчёта вдоль главной диагонали) представлены на рис.1.

В табл.1 приведены результаты тестирования сеточной сходимости рассмотренных схем. Использовались следующие нормы: $L_1 = \sum_{i,j,k} \left|u_{i,j,k}\right| h^3$, $L_{\inf} = \max\left|u_{i,j,k}\right|$. В качестве начальных условий задавался импульс $u(0,x,y,z) = \sin^4(\pi x)\sin^4(\pi y)\sin^4(\pi z)$ в области $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$, и на границах области использовались периодические граничные условия. При этом если перенос ортогональных (дополнительных) производных в численной схеме осуществлялся схемой CIR, то задавались начальные условия на частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ искомой функции, вычисленные аналитически. При тестировании сходимости численных схем, использующих подход продолженных систем уравнений для переноса ортогональных (дополнительных) производных, дополнительно задавались начальные условия на следующие производные искомой функции: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, вычисленные аналитически.

Таблица 1. Сеточная сходимость. Вектор переноса (1, 2, 3) направлен не вдоль диагонали ячеек сетки.

	N	L_1	порядок L_1	L_{inf}	порядок L_{inf}
CIP-3D-1	100	8.93E-04	–	1.89E-02	–
	200	2.07E-04	2.11	4.28E-03	2.14
	400	5.06E-05	2.03	1.02E-03	2.07
БИС1-3D-1	100	1.31E-03	–	9.36E-02	–
	200	3.11E-04	2.07	3.29E-02	1.51
	400	7.45E-05	2.06	1.11E-02	1.56
БИС2-3D-1	100	8.66E-04	–	1.92E-02	–
	200	2.05E-04	2.08	4.30E-03	2.16
	400	5.06E-05	2.02	1.02E-03	2.07
CIP-3D-2	100	9.34E-05	–	2.14E-03	–
	200	1.16E-05	3.01	2.70E-04	2.99
	400	1.46E-06	2.99	3.38E-05	3.00
БИС1-3D-2	100	7.77E-04	–	8.85E-02	–
	200	1.63E-04	2.26	3.11E-02	1.51
	400	3.37E-05	2.27	1.08E-02	1.52
БИС2-3D-2	100	8.47E-05	–	2.93E-03	–
	200	1.09E-05	2.96	3.48E-04	3.08
	400	1.40E-06	2.96	4.17E-05	3.06

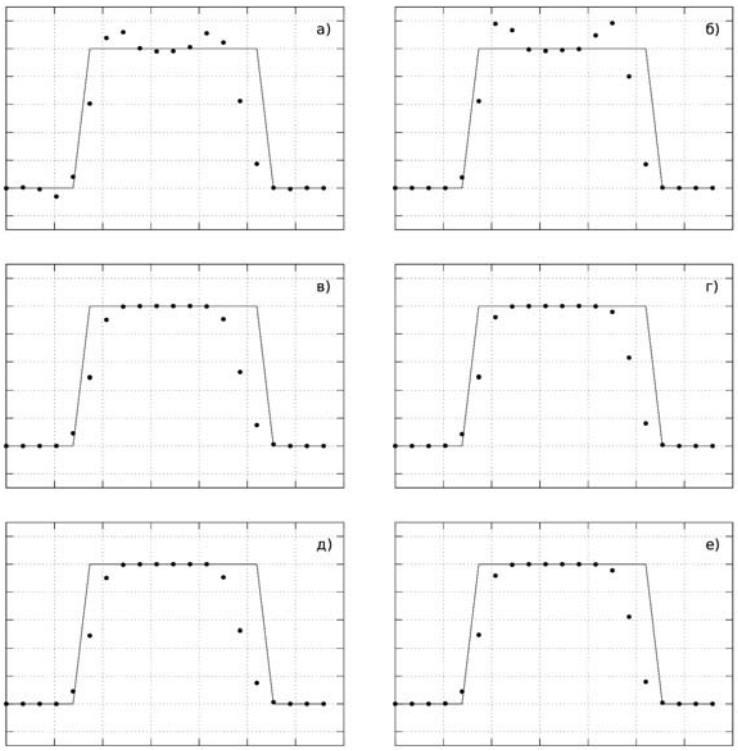

Рис.1. Вид переносимого импульса (24) через 100 шагов разностной схемы: а) CIP-3D-1; б) CIP-3D-2; в) БИС1-3D-1; г) БИС1-1-D-2; д) БИС2-3D-1; е) – БИС2-3D-2.

Поскольку вычислительная сложность задачи получилась высокой и не представлялось возможным провести расчёт на персональном компьютере за приемлемое время, была проведена параллелизация расчётного алгоритма с использованием технологии MPI, и все расчёты проводились на кластере Информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета http://www.nusc.ru/.

4. Заключение

В работе рассмотрена задача численного решения трёхмерного линейного уравнения переноса на прямоугольных расчётных сетках. На основе метода расщепления по координатам решение исходной системы уравнений сведено к последовательному решению трёх одномерных систем уравнений. Проведено расширение одномерных систем уравнений их дифференциальными следствиями с получением набора продолженных систем уравнений. Для их решения используются явные компактные сеточно-характеристические численные схемы на двухточечном по пространству шаблоне.

Проведено обобщение схем CIP, БИС1 и БИС2 на трёхмерный случай. Численное исследование порядка сходимости построенных схем на гладком решении показало его сохранение схемами CIP-3D-2, БИС1-3D-2 и БИС2-3D-2. При переносе ортогональных (дополнительных) производных схемой первого порядка точности порядок схем снижается до второго. Таким образом, схема БИС2-3D-2 обладает третьим порядком сходимости на гладком решении, как и схема CIP2-3D-2, однако не порождает нефизических осцилляций на разрывном решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *О.М. Белоцерковский.* Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Физматлит, 1994, 448 с.;
   O.M. Belotserkovskii. Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred. – M.: Fizmatlit, 1994, 448 s.
2. *V. Rusanov.* Calculation of intersection of non-steady shock waves with obstacles // J. Comput. Math. Phys. USSR, 1961, v.1, p.267-279.
3. *А.С. Холодов, Я.А. Холодов.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т.46, №9, с.1638-1667;
   англ. пер.: *A.S. Kholodov, Ya.A. Kholodov.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, v.46, №9, p.1560-1588.
4. *В.Г. Грудницкий, Ю.А. Прохорчук.* Один приём построения разностных схем с произвольным порядком аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР, 1977, т.234, №6, с.1249-1252;
   V.G. Grudnitskij, Iu.A. Prokhorchuk. Odin priem postroeniia raznostnykh skhem s proizvolnym poriadkom approksimazii differentsialnykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh // Dokl. AN SSSR, 1977, v.234, №6, p.1249-1252.
5. *И.В. Петухов.* Численный расчёт двумерных течений в пограничном слое // Сб. Численные методы решения диффер. и интегр. ур-ий и квадратурные формулы. Изд-во АН СССР, 1964;
   I.V. Petukhov. Chislennyi raschet dvumernykh techenii v pogranichnom sloe // Sb. Chislennye metody resheniia differ. i integr. ur-ii i kvadraturnye formuly. Izd-vo AN SSSR, 1964.
6. *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин.* Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Математическое моделирование, 2012, т.24, №12, с.124-128;

англ. пер.: *M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin.* Impact of different limiting functions on the order of solution obtained by RKDG // Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, v.5, №4, p.346-349.

7. *А.И. Толстых.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990, 230 с.
   A.I. Tolstykh. Kompaktnye raznostnye skhemy i ikh primenenie v zadachakh aerogidrodinamiki. – M.: Nauka, 1990, 230 s.
8. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, 2011, т.23, №6, с.98-110;
   англ. пер.: *B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya.* Monotonic bicompact schemes for linear transport equations // Mathematical Models and Computer Simulations, 2012, v.4, №1, p.92-100.
9. *Yabe Takashi and Aoki, Takayuki and Sakaguchi, Gyo and Wang, PY and Ishikawa, Takeo.* The compact CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-particle) method as a general hyperbolic solver // Computers & Fluids, 1991, v.19, №3-4, p.421-431.
10. *Yabe, Takashi and Mizoe, Hiroki and Takizawa, Kenji and Moriki, Hiroshi and Im, Hyo-Nam and Ogata, Youichi.* Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme // Journal of Computational Physics, 2004, v.194, №1, p.57-77.
11. *И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Компактная сеточно-характеристическая схема для линейного уравнения переноса // Сб. научн. тр. "Моделирование процессов обработки информации". – М.: МФТИ, 2014, с.18-22;
    I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Kompaktnaia setochno-kharakteristicheskaia schema dlia lineinogo uravneniia perenosa // Sb. nauchn. tr. “Modelirovanie protsessov obrabotki informatsii”. – M.: MFTI, 2014, p.18-22.
12. *К.М. Магомедов, А.С. Холодов.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969, т.9, №2, с.373-386;
    англ. пер.: *K.M. Magomedov, A.S. Kholodov.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969, v.9, №2, p.158-176.
13. *И.Б. Петров, А.С. Холодов.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, т.24, №8, с.1172-1188;
    англ. пер.: *I.B. Petrov, A.S. Kholodov.* Regularization of discontinuous numerical solutions of equations of hyperbolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1984, v.24, №4, p.128-138.
14. *Bram Van Leer.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method // Journal of Computational Physics, 1979, v.32, №1, p.101-136.
15. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Обобщение компактной схемы для линейного уравнения переноса на двумерный случай // Сб. научн. тр. "Моделирование процессов обработки информации". – М.: МФТИ, 2014, с.23-26;
    V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Obobshchenie kompaktnoi skhemy dlya lineinogo uravneniia perenosa na dvumernyi sluchai // Sb. nauchn. tr. “Modelirovanie protsessov obrabotki informatsii”. – M.: MFTI, 2014, p.23-26.
16. *R. Courant, E. Isaacson, M. Rees.* On the solutions of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1952, v.5, №5, p.243-254.

Поступила в редакцию 08.07.15