Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра информатики

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

Выпускная квалификационная работа

Выполнил:

студент 176(а) группы Губайдулин Айдар Наилевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., Гасников Александр Владимирович

Москва 2015

Оглавление

Глава 1

Введение. Постановка задачи

Расчет матрицы корреспонденций для коммуникационных сетей, например, транспортных или интернета, является актуальной задачей на сегодняшней день. В данной работе рассматриваются различные методы решения этой задачи и сравнивается их эффективность. Рассматриваемая телекоммуникационная сеть представляет собой множество узлов (роутеров), соедининенных каналами связи. Эту сеть можно представить в виде графа, в котором вершинами являются узлы, а ребрами - каналы связи.

При постановке подобных задач известным считаются количество передаваемой информации на ребрах и распределение обьема корреспонденций для выделенной пары вершин по различным путям в графе, соединяющим их. Учитывая эти данные, нужно найти объём информации, отправляемой между любыми двуми узлами сети.

Перейдем к математической модели, описывающей эту задачу. Имеется неполная система линейных уравнений $Ax = b$, где элемент i вектора x является объемом информации, передаваемым между парой вершин, обозначаемой индексом i, элемент a_{ij} матрицы A является долей объема информации, передаваемой между парой вершин i, которая проходит по ребру j, элемент j вектора b – суммарный объем информации, проходящей через ребро j. Матрица A имеет размеры $m \times n$, где m – число ребер в графе (обычно $10^2 - 10^4$), а n – количество пар вершин в графе (обычно $10^4 - 10^8$). В силу специфики задачи, матрица A одновременно разрежена по столбцам и по строкам. Нужно найти вектор x, удовлетворяющий системе линейных уравнений $Ax = b$ и адекватно показывающий распределение информации между любыми двумя узлами реальной сети.

Глава 2

Модели матрицы корреспонденций

2.1 Гравитационная модель

Гравитационная модель является аналогом закона гравитационного притяжения в физике (сила притяжения между двумя телами пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними). В нашей задаче в качестве тел выступают конечные узлы связи, за массу тела выступает суммарный поток выходящей/входящей информации.

Гравитационная модель имеет следующий вид:

$$x_{ij} = k\frac{s_i d_j}{f(c_{ij})} \quad i \in S,\ j \in D, \tag{2.1}$$

где S и D – множества отправляющих и принимающих узлов, s_i - общий объем выходящей из узла $i \in S$ информации, d_j - общий объем входящей в узел $j \in D$ информации, c_{ij} - удельные затраты на прохождение пути между узлами i и j, функция $f(c_{ij})$ характеризует предпочтительность выбора пары (i, j) для перемещения объема информации, k - калибровочный коэффициент.

На практике к условию (2.1) добавляются ограничения на входящие и выходящие объемы s_i и d_j. В итоге гравитационная модель имеет следующий вид:

$$x_{ij} = k\frac{s_i d_j}{f(c_{ij})} \quad i \in S, j \in D \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in D} x_{ij} = s_i, \quad i \in S \tag{2.3}$$

$$\sum_{i \in S} x_{ij} = d_j, \quad j \in D \tag{2.4}$$

$$x_{ij} \geq 0 \tag{2.5}$$

Полученную систему можно переписать следующим образом:

$$x_{ij} = \alpha_i \beta_j s_i d_j f(c_{ij}), \quad i \in S,\ j \in D \tag{2.6}$$

$$\alpha_i = \left(\sum_{j \in D} \beta_j d_j f(c_{ij}) \right)^{-1} \tag{2.7}$$

$$\beta_j = \left(\sum_{i \in S} \alpha_i s_i f(c_{ij}) \right)^{-1} \tag{2.8}$$

Условие совместности в выбранных обозначениях записывается следующим образом:

$$\sum_{i \in S} s_i = \sum_{j \in D} d_j \tag{2.9}$$

2.2 Энтропийная модель

Энтропийная модель основывается на физическом предположении, что любая замкнутая физическая система стремится достичь устойчивого равновесного состояния, которое характеризуется максимумом энтропии этой системы. Этот способ вычисления матрицы корреспонденций был использован в работе [10].

Элемент x_{ij} матрицы корреспонденций является количеством пакетов информации, отправляемых из узла $i \in S$ в узел $j \in D$. Одной и той же матрице корреспонденций может соответствовать несколько состояний сети. Подчиняясь принципу максимизации энтропии, будем искать величину $x = \{x_{ij} | i \in S, j \in D\}$, которая максимизирует вероятность $P(x)$ реализации состояния системы, соответствующего матрице корреспонденций x.

Пусть

$$X = \sum_{\substack{i \in S \\ j \in D}} x_{ij} \tag{2.10}$$

– общее количество передаваемых пакетов в сети. Обозначим через $p_{ij} \geq 0$ вероятность того, что пакет пройдет по каналу (ij).

По аналогии со схемой Бернулли можно получить формулу для вероятности реализации состояния сети с матрицей корреспонденций x:

$$P(x) = X! \prod_{\substack{i \in S \\ j \in D}} \frac{p_{ij}^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \tag{2.11}$$

При постановке задачи нужно учитывать ограничения на объемы выходящих и выходящих пакетов информации и ограничения на затраты, связанные с перемещением пакетов по сети:

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \in D}} c_{ij} x_{ij} = C. \tag{2.12}$$

Заменим для удобства целевую функцию $P(x)$ ее логарифм (это преобразование функции монотонно и не влияет на решение)

$$\log P(x) = \log X! + \sum_{\substack{i \in S \\ j \in D}} \left(x_{ij} \log p_{ij} - \log x_{ij}! \right) \tag{2.13}$$

Далее, предполагая величины x_{ij} достаточно большими вблизи точки, максимизирующей $P(x)$, целевую функцию можно заменить ее апроксимацией, используя формулу Стирлинга:

$$\log n! = n \log n - n + O(\log n) \tag{2.14}$$

и отбросив слагаемые, логарифмические по x_{ij}.

$$\log P(x) \approx X \log X + \sum_{\substack{i \in S \\ j \in D}} x_{ij} \log \frac{p_{ij}}{x_{ij}} \tag{2.15}$$

получаем:

$$\min_{\substack{\sum\limits_{i \in S,\, j \in D} c_{ij} x_{ij} = C \\ \sum\limits_{j \in D} x_{ij} = s_i,\ i \in S \\ \sum\limits_{i \in S} x_{ij} = d_j,\ j \in D}} \sum_{\substack{i \in S \\ j \in D}} x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{p_{ij}} \tag{2.16}$$

Эта задача принадлежит классу задач энтропийно-линейного программирования(ЭЛП). Она является выпуклой, потому что все ограничения можно записать в виде линейных неравенств, а целевая функция является выпуклой:

$$P''(x) = diag\left(\frac{p_{ij}}{x_{ij}}\right) \geq 0 \tag{2.17}$$

Для решения этой задачи нужно обладасть информацией о вероятности прохождения пакета по тому или иному каналу связи. Если считать, что эта вероятность одинакова для всех каналов, то целевая функция запишется в следующем виде:

$$P(x) = \sum_{\substack{i \in S \\ j \in D}} x_{ij} \log x_{ij}. \tag{2.18}$$

Глава 3

Штрафные функции

3.1 l_p-норма

Очень часто в качестве штрафной функции $d(x, y)$ для рассматриваемого типа задач выбирают квадрат евклидовой нормы $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$. Тогда получаем задачу:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ Ax=b}} \|x - x^m\|_2^2 \tag{3.1}$$

где x^m - модель матрицы корреспонденций для сети. Возможны некоторые варианты релаксации данной задачи:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ \|Ax-b\|_2 \leq \varepsilon}} \|x - x^m\|_2^2; \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x - x^m\|_2^2, \tag{3.2}$$

где параметр λ обычно выбирают порядка ε^2 для достижения приемлемой точности величины $\|Ax - b\|_2^2$.

Формулировка задачи $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n_+} \|Ax-b\|_2^2+\lambda\|x-x^m\|_2^2$ допускает вероятностную интерпретацию: подобная задача возникает при поиске максимума апостериорной плотности вероятности вектора x с априорным распределением $N(x^m; \sigma_x^2 I_n)$ при наличии измерений со случайной ошибкой $b = Ax + \xi$, $\xi \in N(0, \sigma_{noise}^2 I_n)$, где $\lambda = \sigma_{noise}^2/\sigma_x^2$.

На практике часто встречаются критерии качества решения, где на тестовых данных с известной матрицей корреспонденций x требуется небольшая величина относительной ошибки в определении компонент вычисленной матрицы x^*, например:

$$\frac{\left(i : \left|\frac{x_i^* - x_i}{x_i}\right| \leq \varepsilon\right)}{n} * 100\%, \qquad \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^* - x_i}{x_i}\right)^2},$$

поэтому даже небольшая абсолютная погрешность в определении компонент матрицы x^*, соответствующих малым компонентам истинной матрицы x, может привести к значительному ухудшению критериев качества, приведенных выше. Для "прореживания" матрицы-решения x^* (обнуления малых элементов) может быть использована l_1-норма в качестве штрафной функции:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ Ax=b}} \|x\|_1 \tag{3.3}$$

Данная формулировка также допускает некоторые релаксации, определяемые требуемой точностью выполнения равенства $Ax = b$:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ \|Ax-b\|_2 \leq \varepsilon}} \|x\|_1; \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1, \tag{3.4}$$

В последнем случае говорят о задачах типа LASSO. Регуляризующий параметр, как и в случае выше, выбирается порядка ε^2.

3.2 Расстояние Кульбака-Лейблера

Определение. Пусть даны две дискретные случайные величины X и Y, принимающие значения в одном множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, и их распределения задаются функциями вероятности p и q соответственно. Тогда расстояние Кульбака — Лейблера D_{KL} задаётся формулой:

$$D_{KL}(p, q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)} \tag{3.5}$$

Идея использования расстояния Кульбака-Лейблера является может быть обоснована в рамках описания энтропийной модели матрицы корреспонденций рассматриваемой сети. При получении целевой функции в задаче (2.16) никак не использовались балансовые ограничения, применительно к выбору критерия качества, они могут быть заменены на систему уравнений $Ax = b$. В качестве величины, характеризующей степень предпочтительности выбора пакетом информации канала (i, j) может использоваться соответствующий элемент гравитационной модели матрицы корреспонденций. Получаем задачу:

$$\min_{\substack{x \in S(X) \\ Ax=b}} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{x_i^g} \tag{3.6}$$

Глава 4

Численные Алгоритмы

4.1 Энтропийно-линейное программирование

В этом параграфе будет обсуждаться один из подходов к поиску минимума расстояния Кульбака-Лейблера между моделью матрицы корреспонденции и матрицей корреспонденций, принадлежащей афинному многообразию.

$$\min_{\substack{Ax=b\\ x\in S_n(1)}} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{p_i} \tag{4.1}$$

без ограничения общности можно считать $p \in relint S_n(1)$. Будем решать более общую задачу. Ограничения запишутся в виде $Ax \le b$ и $x \in \{y | y \in \mathbb{R}^n_+, \sum_{i=1}^{n} y_i \le 1\}$ Двойственная задача имеет вид

$$\max_{\mu\in\mathbb{R}^m_-} g(\mu) = \max_{\mu\in\mathbb{R}^m_-} \langle \mu, b\rangle + \begin{cases} -\frac{1}{e}\sum_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i}, & \text{в случае} \sum_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i} \le e \\ -\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i}\right), & \text{иначе} \end{cases} \tag{4.2}$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач:

$$x_i(\mu) = r\frac{p_i e^{(A^*\mu)_i}}{\sum_{k=1}^{n} p_k e^{(A^*\mu)_k}}, \quad r = \begin{cases} -\frac{1}{e}\sum_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i}, & \text{в случае} \sum_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i} \le e \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{4.3}$$

Вектор x будем считать $(\varepsilon_f, \epsilon_c)$-решением задачи

$$\min_{\substack{Ax\le b\\ x\succeq 0\\ \|x\|_1\le 1}} f(x) = \min_{\substack{Ax\le b\\ x\succeq 0\\ \|x\|_1\le 1}} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{p_i}, \tag{4.4}$$

если выполняются условия

$$f(x) - f^* \le \varepsilon_f, \quad Ax - b \le \varepsilon_c \tag{4.5}$$

Определим достаточные условия $(\varepsilon_f, \varepsilon_c)$-решения задачи (4.4)

Лемма 1 *Пусть* $-\langle \nabla g(\mu), \mu \rangle \le \varepsilon_f$ *и* $-\nabla g(\mu) \le \varepsilon_c$, *тогда* $x(\mu)$ *является* $(\varepsilon_f, \varepsilon_c)$-*решением задачи (4.4)*

Доказательство. Докажем равенство $\nabla g(\mu) = b - Ax(\mu)$. Целевой функции двойственной задачи:

$$g(\mu) = \min_{\substack{\|x\|_1 \le 1 \\ x \succeq 0}} \left(f(x) + \langle \mu, b - Ax \rangle \right) \tag{4.6}$$

Используя определение производной и условие оптимальности первого порядка по переменной x для функции $L(x;\mu) = f(x) + \langle \mu, b - Ax \rangle$, получаем требуемое:

$$\nabla_i g(\mu) = \lim_{h \to 0} \frac{\min\limits_{\substack{\|x\|_1 \le 1 \\ x \succeq 0}} L(x; \mu + e_i h) - \min\limits_{\substack{\|x\|_1 \le 1 \\ x \succeq 0}} L(x;\mu)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\langle \nabla_x L(x(\mu);\mu), \nabla_{\mu_i} x(\mu) \rangle h + \nabla_{\mu_i} L(x(\mu);\mu) h + o(h)}{h} = \nabla_{\mu_i} L(x(\mu);\mu) = (b - Ax(\mu))_i$$

Вводем обозначение x^* для решения задачи (4.4). Тогда

$$L(x(\mu);\mu) \le L(x^*;\mu) = f(x^*)$$
$$f(x(\mu)) \le f(x^*) - \langle \mu, b - Ax(\mu) \rangle = f^* - \langle \mu, \nabla g(\mu) \rangle \le f^* + \varepsilon_f \quad \blacksquare$$

Лемма 2 *Имеет место неравенство*

$$\|\nabla g(\mu_1) - \nabla g(\mu_2)\|_2 \le L \|\mu_1 - \mu_2\|_2 \tag{4.7}$$

где $L = \max\limits_{1 \le i \le n} \|a_i\|_2^2$, a_i - i-*й столбец матрицы* A.

Доказательство. Достаточно показать, что наибольший модуль собственного значения матрицы, составленной из частных производных компонент вектора $\nabla g(\mu)$, не превосходит L. Для случая $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i} \ge e$ константа Липшица получена в статье [12], для $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i e^{(A^*\mu)_i} \le e$ оценка проводится аналогичным образом:

$$(\nabla_i g(\mu))_{\mu_j} = -\frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n} p_k e^{(A^*\mu)_k} a_{ik} a_{jk} \tag{4.8}$$

Представим матрицу в виде:

$$\left((\nabla_i g(\mu))_{\mu_j} \right)_{i,j=1,1}^{n,m} = -\frac{1}{e} A \; diag \left(p_k e^{(A^*\mu)_k} \right)_{k=1}^{n} A^* \tag{4.9}$$

Матрица отрицательно определенная. Оценим сверху наибольший модуль собственного значения $\frac{1}{e}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{(A^*\mu)_k} a_{ik}^2 \le \max\limits_{1\le k\le n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}^2$ ■

Таким образом, целевая функция явялется гладкой, однако константу выпуклости оценить нельзя. При использовании быстрого градиентного метода [5] (начиная с точки $\mu = 0$) для достижения $(\varepsilon_f, \varepsilon_c)$-решения требуется $O(\max\{LR^2/\varepsilon_f, LR/\varepsilon_c\})$ итераций, где $R = \|\mu^*\|_2$ - размер решения задачи (4.2). В работе [7] описан способ улучшения такой оценки с помощью введения регуляризации целевой функции $g(\mu)$по Тихонову $g_\delta(\mu) = g(\mu) - \delta\|\mu\|_2^2/2$.

Предлагается решать регуляризованную задачу:

$$\max_{\mu\in\mathbb{R}^m_-} g_\delta(\mu) \tag{4.10}$$

Оптимальный выбор параметра δ дает оценку на общее количество арифметических операций, используемых при реализации быстрого градиентного метода для сильно выпуклых целевых функций, для достижения $(\varepsilon_f, \varepsilon_c)$-решения.

$$O\left((n+sm)\sqrt{\frac{LR^2}{\varepsilon_f + 2R\varepsilon_c}}\ln\left(\frac{LR^2\Delta_g}{\varepsilon_f^2 + 2R\varepsilon_c\varepsilon_f}\right)\right), \tag{4.11}$$

где s - количество ненулевых элементов в строке матрицы A, а Δ_g-верхняя оценка вариация функции g на ограничениях в задаче (4.2), которая в нашем случае дается формулой

$$\max_{\substack{x\succeq 0\\ \|x\|_1\le 1}} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\frac{x_i}{p_i} = \max_{r\in[0,1]} r\ln\frac{r}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i} = -\ln\min_{1\le i\le n} p_i \tag{4.12}$$

Глава 5

Экперименты

В качестве критерия остановки алгоритма выбиралось достижение $(\varepsilon_f, \varepsilon_c)$-решения задачи ($\max\{\varepsilon_f, \varepsilon_c\} \leq 10^{-4}$).

5.1 Рассматриваемые модели

Мы рассматриваем два подхода к расчету матрицы корреспонденции:

1 Томогравитационную модель (tomogravity), приводящую к задаче

$$\min_{x \geq 0, Ax=b} \|x - x^g\|_2^2 \tag{5.1}$$

2 Энтропийный подход (MMI), приводящий к задаче

$$\min_{Ax=b, x \in S_n(N)} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(x_i / x_i^g\right) \tag{5.2}$$

где x матрица корреспонденций, представленная в виде вектора, A матрица распределения нагрузки запросов по путям, b вектор нагрузки на ребра графа, x^g - гравитационная модель матрицы корреспонденций.

5.2 Критерии качества

Введем обозначения:

- x' вычисленное решение;
- x точное решение;
- N размер матрицы корреспонденций;

В литературе описаны следующие критерии качества:

- Точность
$$\texttt{Precision} = \frac{\#i : |x_i - x'_i|/x_i < \texttt{Tolerance}}{N} \cdot 100\%,$$
расчитывается для разных уровней параметра `Tolerance`.

- Ошибка вычисления нагрузки на ребрах
$$\texttt{LLA} = (1 - \|Ax' - b\|_2^2/\|b\|_2^2) \cdot 100\% = \left(1 - \sum_{j=1}^{N}((Ax')_i - b_i)^2 / \sum_{j=1}^{N} b_i^2\right) \cdot 100\%,$$

- `RMSRE` мера для 75% наибольших элементов матрицы корреспонденций
$$\texttt{RMSRE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x'_i - x_i}{x_i}\right)^2} \cdot 100\%$$

- `RMSE` мера
$$\texttt{RMSE} = 100\% \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i)^2} / \sum_{i=1}^{n} x_i$$

"Сложность это отношение число неизвестных к количеству строк матрицы A.

5.3 Применение быстрого градиентного метода

Обе задачи могут быть решены с помощью быстрого градиентного метода, примененного к двойственной задаче, которая может быть выписана в этих случаях явно.

5.3.1 Результаты

Параметры вычислительной машины, на которой были проиведены рассчеты:
Intel Core i5-2410M @ 2.3 GHz 2.3 GHz / 4 Gb/ OS Windows 7.
Было использовано одно ядро.

- Параметры задачи
  - Число вершин: 300
  - Число ребер: 1500
  - Размер матрицы корреспонденций: 89700
  - сложность: ~ 60

Таблица 5.1: Результаты для различных моделей

Results	MMI	tomogravity
RMSRE (top 75% of traffic)	66%	67%
RMSE	0.0006 %	0.0006 %
LLA	99.4 %	99.9%
Время вычислений:	116 с.	89 с.

Таблица 5.2: Precision/Tolerance

Tolerance	MMI	tomogravity
10%	10%	10%
20%	21%	21%
30%	34%	34%
40%	49%	49%
50%	66%	65%
60%	69%	69%
70%	71%	71%
80%	73%	73%
90%	74%	74%
100%	76%	76%

- Параметры задачи
  - Число вершин: 300
  - Число ребер: 1500
  - Размер матрицы корреспонденций: 76500
  - сложность: 51

Таблица 5.3: Результаты для различных моделей

Результаты	MMI	tomogravity
RMSRE (top 75% of traffic)	64%	65%
RMSE	0.0008 %	0.0008 %
LLA	99.4 %	99.9%
Время вычислений:	407 с.	351 с.

Таблица 5.4: Precision/Tolerance

Tolerance	MMI	tomogravity
10%	9%	9%
20%	19%	19%
30%	30%	30%
40%	43%	44%
50%	60%	60%
60%	66%	66%
70%	68%	69%
80%	70%	70%
90%	72%	72%
100%	73%	74%

- Параметры задачи
  - Число вершин: 500
  - Число ребер: 6000
  - Размер матрицы корреспонденций: 220 000
  - сложность: ~ 37

Таблица 5.5: Результаты для различных моделей

Результаты	MMI	tomogravity
RMSRE (top 75% of traffic)	56%	56%
RMSE	0.00039 %	0.00038 %
LLA	99.4 %	99.9%
Время вычислений:	2232 с.	2319 с.

Таблица 5.6: Presicion/Tolerance

Tolerance	MMI	tomogravity
10%	8%	8%
20%	15%	15%
30%	23%	23%
40%	32%	32%
50%	40%	40%
60%	49%	49%
70%	57%	57%
80%	60%	60%
90%	62%	62%
100%	63%	63%

Глава 6

Выводы

В работе были рассмотрены существующие подходы к вычислению матрицы корреспонденций телекоммуникационной сети. Была сделана постановка задачи, рассмотрены физические модели матрицы корреспонденций и численные алгоритмы для ее нахождения, реализован быстрый градиентый метод для двойственных задач.

Литература

1. Введение в выпуклую оптимизацию / Нестеров Ю.Е.; Под ред. Б.Т.Поляка, С.А. Назина. Изд. МЦНМО, Москва, ISBN 978-5-94057-623-5; 2010 г.

2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова. — М.: МФТИ, 2010. — 362 с. ISBN 978-5-7417-0334-2

3. Гасников А.В., Гасникова Е.В., Нестеров Ю.Е. Об эффективных численных методах решения задач энтропийно-линейного программирования в случае разреженных матриц // e-print, 2014. arXiv:1410.7719

4. S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.

5. Theory of Convex Optimization for Machine Learning Sebastien Bubeck, 2011.

6. Y. Nesterov. A method of solving a convex programming problem with convergence rate o(1/k2). Soviet Mathematics Doklady, 27(2): 372–376, 1983.

7. Брэгман Л. Д. Доказательство сходимости метода Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // ЖВМ и МФ. 1967. № 1. С. 147–156.

8. Estimating Point-to-Point and Point-to-Multipoint Traffic Matrices: An Information-Theoretic Approach Yin Zhang, Matthew Roughan, Carsten Lund, and David L. Donoho, IEEE/ACM TRANSACTIONS ON NETWORKING, VOL. 13, NO. 5, OCTOBER 2005

9. Wilson A.G. A statistical theory of spatial distribution models Transportation Research. 1967.V.1.P.253-270.

10. Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Моделирование транспортных потоков г. Владивостока на основе теории равновесия Sisteme de transport si logistica: Materialele Conf. Int., Chisinau, 22-23 octombrie 2009; red. Resp. Dumitru Solomon; Acad. de Transporturi, Informatica si Comunicatii. Ch.: Evrica, 2009. P. 334-348.

11. Nesterov Yu. Smooth minimization of non-smooth function // Math. Program. Ser. A. 2005. V. 103. №1.P.127-152.