

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра информатики

Математическое моделирование разрушений в
твердых деформируемых телах
сеточно-характеристическим методом

Дипломная работа на степень магистра
студента 973 группы
Григорьевых Д.П.

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Хохлов Н.И.

Работа выполнена в МФТИ,
г.Долгопрудный,
2015г.

Содержание

1	Введение	3
2	Определяющие уравнения	4
3	Обзор методов моделирования разрушений	6
4	Программный комплекс rest	7
5	Сеточно-характеристический метод на прямоугольных сетках	8
5.1	Покоординатное расщепление	8
5.2	Решение одномерных систем	9
5.3	Расчетная сетка	10
5.4	Граничные корректоры	11
5.5	Контактные корректоры	12
6	Модели разрушения	14
6.1	Модель сдвигового разрушения	15
6.1.1	Сейсмостойкость купола АЭС	16
6.1.2	Сейсмостойкость двухэтажного жилого дома	17
6.1.3	Взрыв круга из центра	17
6.2	Модель однобереговых трещин	18
6.2.1	Соударение стальной и стеклянных пластин	20
6.2.2	Соударение стального шарика и стеклянной пластины	21
6.2.3	Соударение двух шариков о стеклянную пластину .	23
6.2.4	Рост трещин при растяжение пластины	23
6.2.5	Отражение плоской волны от однобереговой трещины	24

6.3	Модель двухбереговых трещин	25
6.3.1	Кластер двухбереговых трещин	26
6.3.2	Прохождение плоской волны через флюидонасыщен- ные поры	28
7	Заключение	29

1 Введение

Компьютерное моделирование широко применяется в настоящее время практически во всех областях: строительстве, георазведке, медицине и прочее. Подходов к моделированию тоже множество, от лучевых методов, до численного решения системы определяющих уравнений. Моделирование разрушений одна из основных задач в этой области.

В данной работе рассматриваются задачи дискретного динамического разрушения твердых деформируемых тел. Приведен краткий обзор существующих алгоритмов разрушения, описание программного комплекса, численного метода и результаты расчетов. Для учета разрушений использовались модели сдвигового разрушения и образования трещин, за основу которой взята модель Майчена-Сака [1]. Для численного решения рассматриваемых задач используется сеточно-характеристический метод [2], разработанный для численного решения задач динамического поведения деформируемых твердых тел в [3].

В данной работе рассматривались задачи о соударении стальных шариков со стеклянной пластиной с откольными разрушениями, сейсмостойкости наземных сооружений, отражение плоской волны от кластера трещин и другие.

2 Определяющие уравнения

Бесконечно малый объем линейно-упругой среды подчиняется следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \nabla_j \sigma_{ij}, \quad (i, j = x, y, z), \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= q_{ijkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t} + F_{ij}, \\ q_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),\end{aligned}\tag{1}$$

где ρ - плотность материала, λ и μ - параметры Ламе, ∇_j - ковариантная производная по координате j , δ_{ij} - символ Кронекера, v_i - компоненты скорости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, ϵ_{ij} - компоненты тензора деформаций, F_{ij} - не обязательная правая часть.

Продольная и поперечная скорости звука c_1 и c_2 и модуль всестороннего сжатия K выражаются через плотность и параметры Ламе следующим образом:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},\tag{2}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\tag{3}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.\tag{4}$$

Производную тензора напряжений можно приближенно выразить через скорость:

$$\frac{\epsilon_{ij}}{\partial t} \approx \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).\tag{5}$$

Тогда систему (1) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0},\tag{6}$$

где $\mathbf{u} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T$ - вектор искомых функций, x, y, z - независимые переменные, v_x, v_y, v_z - компоненты скорости $\mathbf{v}$, $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ - компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ - матрицы (9×9) вида:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

3 Обзор методов моделирования разрушений

Метод частиц. Подробно метод описан в [4]. Среда моделируется множеством частиц, связанных друг с другом потенциальным полем. Разрушение происходит когда расстояние между частицами превышает потенциал взаимодействия, таким образом это естественный для модели процесс. Интересные результаты по моделированию откольных разрушений и пробоя тонкой пластины приведены в [5]. Описание континуальной модели дано в [6]. Метод позволяет легко учитывать разлет осколков и наиболее подходит для расчетов больших деформаций и пробоев. Из минусов - низкий порядок. Большинство работ по разрушению выполняют именно этим методом.

Тетраэдральные сетки. Данный метод хорошо подходит для моделирования стационарных трещин, как в [7] и [8], за счет использования иерархических сеток. Динамический рост разрушения имеет схожие проблемы и идеи, как и при расчетах на прямоугольных сетках, описанные в данной работе.

4 Программный комплекс `rect`

На кафедре информатики разрабатывается программный комплекс для решения уравнений упругости на прямоугольных сетках. Комплекс состоит из множества модулей и имеет легко расширяемую архитектуру. Далее список основных элементов:

1. *grid* – Описание сетки, может наследовать параметры от другой сетки.
2. *grid.schema* – Используемая одномерная схема на 5-ти точечном шаблоне. Реализовано несколько десятков различных схем.
3. *grid.filler* – Функция, применяемая к сетке перед переходом на новый временной слой. Например, используется для копирования граничных узлов на 2 мнимых слоя при создании условия поглощения.
4. *grid.corrector* – Функция, применяемая к сетке после перехода на новый временной слой. Это наиболее широкая часть. Здесь реализован учет правой части уравнений (например, ускорение свободного падения), сила на границе и, собственно, реализованный в данной работе учет разрушения.
5. *contact* – Функция, применяемая одновременно к двум сеткам. Реализованы условия слипания и скольжения.
6. *initial* – Начальные условия. Плоская волна, взрыв, землетрясение и другие.
7. *saver* – Как сохранять результаты расчетов (vtk, cvs).

Комплекс может работать с произвольным количеством сеток, но на данный момент расчет в несколько потоков с использованием MPI возможен только на одной сетке. Поэтому отдельный интерес представляет исследование алгоритмов, использующих всего одну прямоугольную сетку.

Скорость расчета получается в десятки раз выше, чем в программах, работающих на тетраэдральных сетках, но проблематично считать сложные структуры.

5 Сеточно-характеристический метод на прямоугольных сетках

5.1 Покоординатное расщепление

Переход от одного временного слоя к другому может быть записан в виде:

$$\mathbf{u}^{n+1} = F(\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z)\mathbf{u}^n, \quad (10)$$

где F - оператор перехода, определяющий используемую разностную схему.

В работе используется следующая схема расщепления:

$$F(\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z) = F_x(\mathbf{A}_x)F_y(\mathbf{A}_y)F_z(\mathbf{A}_z). \quad (11)$$

В результате решение исходной системы сводится к последовательному решению трех одномерных систем:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{0}; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

5.2 Решение одномерных систем

$\mathbf{A}$ разрежены и аналитически приводятся к диагональному виду $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(c_1, -c_1, c_2, -c_2, c_2, -c_2, 0, 0, 0)$. Далее индекс у $\mathbf{A}$ опускается, подразумевая, что мы решаем последовательно задачу для x , y и z .

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}. \quad (13)$$

После замены переменных $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Omega} \mathbf{u}$ получаем 9 независимых линейных уравнений переноса.

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \alpha} = 0, \quad (14)$$

где α - соответствующая ось координат (x , y или z). Далее восстанавливается решение на $(n+1)$ -ом временном слое:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\omega}^{n+1}. \quad (15)$$

Для решения одномерных уравнений в частных производных гиперболического типа применяется сеточно-характеристический метод 4-ого порядка точности:

$$\omega_m^{n+1} = \omega_m^n - \sigma(\Delta_1^n - \sigma(\Delta_2^n - \sigma(\Delta_3^n - \sigma\Delta_4^n))), \quad (16)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{\lambda \tau}{h}, \\ \Delta_1^n = \frac{1}{24}(-2\omega_{m+2}^n + 16\omega_{m+1}^n - 16\omega_{m-1}^n + 2\omega_{m-2}^n), \\ \Delta_2^n = \frac{1}{24}(-\omega_{m+2}^n + 16\omega_{m+1}^n - 30\omega_m^n + 16\omega_{m-1}^n - \omega_{m-2}^n), \\ \Delta_3^n = \frac{1}{24}(2\omega_{m+2}^n - 4\omega_{m+1}^n + 4\omega_m^n - 2\omega_{m-2}^n), \\ \Delta_4^n = \frac{1}{24}(\omega_{m+2}^n - 4\omega_{m+1}^n + 6\omega_m^n - 4\omega_{m-1}^n + \omega_{m-2}^n). \end{array} \right.$$

Для обеспечения монотонности разностной схемы используется ограничитель:

$$\omega_m^{n+1} = \begin{cases} \max(\omega_m^n, \omega_{m-\text{sign}(\lambda)}^n), & \omega_m^{n+1} > \max(\omega_m^n, \omega_{m-\text{sign}(\lambda)}^n) \\ \min(\omega_m^n, \omega_{m-\text{sign}(\lambda)}^n), & \omega_m^{n+1} < \min(\omega_m^n, \omega_{m-\text{sign}(\lambda)}^n) \end{cases}$$

5.3 Расчетная сетка

В расчетах используется гексаэдральная структурная лагранжевая расчетная сетка. В общем случае область интегрирования разбивается на подобласти, каждая из которых имеет свою регулярную ijk -сетку (см. рис. 1). На каждом шаге по времени криволинейная сетка отображается на прямоугольную.

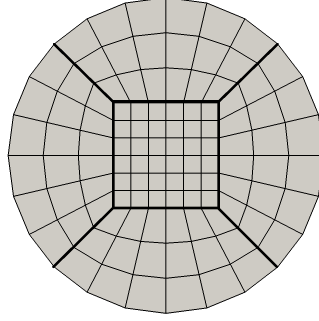


Рис. 1: 5 расчетных сеток для круга.

Корректировка координат узлов сетки на каждом шаге по времени, для каждого узла осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \mathbf{v}^n \tau, \quad (17)$$

где $\mathbf{r}^n$ - координаты узла, $\mathbf{v}^n$ - скорость среды, τ - шаг интегрирования по времени.

5.4 Граничные корректоры

На границе области интегрирования система уравнений дополняется тремя граничными условиями:

$$\mathbf{B}\mathbf{u}^n = \mathbf{b}, \quad (18)$$

где $\mathbf{B}$ - матрица 3×9 , $\mathbf{b}$ - вектор размерности 3.

Решение (15) на верхнем временном слое будет иметь вид:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{(in)}\boldsymbol{\omega}^{n+1(in)} + \mathbf{\Omega}^{(out)}\boldsymbol{\omega}^{n+1(out)} = \mathbf{u}^{n+1(in)} + \mathbf{\Omega}^{(out)}\boldsymbol{\omega}^{n+1(out)}, \quad (19)$$

где $\mathbf{\Omega}^{(in)}$ и $\mathbf{\Omega}^{(out)}$ - прямоугольные матрицы, составленные из тех столбцов матрицы $\mathbf{\Omega}^{-1}$, которые соответствуют входящим или выходящим из области интегрирования характеристикам, соответственно. $\boldsymbol{\omega}^{n+1(in)}$ находится так же, как и $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$ для внутренних точек, неизвестен лишь $\boldsymbol{\omega}^{n+1(out)}$, который можно выразить из граничных условий (18):

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1(out)} = (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{(out)})^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{u}^{n+1(in)}). \quad (20)$$

Подставляя это в (19) получаем общую формулу для расчета граничных узлов:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1(in)} + \mathbf{\Omega}^{(out)}(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{(out)})^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{u}^{n+1(in)}). \quad (21)$$

Введем вектор $\mathbf{n}$ - нормаль к поверхности. Оператором $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ обозначается тензорное произведение векторов, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$. В работе использовались 3 типа граничных условий.

1. Для заданной плотности поверхностных сил на границе $\mathbf{f}$ ($\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} =$

$\mathbf{f}$), скорость и тензор напряжения рассчитывается по формулам:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1(in)} - \frac{c_1 \mathbf{z}^{n+1} - (c_1 - c_2)(\mathbf{z}^{n+1} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{\rho c_1 c_2}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}^{n+1(in)} - \mathbf{z}^{n+1} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{z}^{n+1} - \\ &\quad - \frac{(\mathbf{z}^{n+1} \cdot \mathbf{n})}{\lambda + 2\mu} (\lambda \mathbf{I} - 2(\lambda + \mu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}),\end{aligned}\quad (22)$$

где $\mathbf{z}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{n+1(in)}\mathbf{n} - \mathbf{f}$, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1)$.

2. Для заданной скорости $\mathbf{V}$ границы:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{V}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}^{n+1(in)} - \rho[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}^{n+1})((c_1 - 2c_2 - c_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + c_3\mathbf{I}) + \\ &\quad + c_2(\mathbf{g}^{n+1} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^{n+1})],\end{aligned}\quad (23)$$

где $c_3 = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\rho(\lambda + 2\mu)}}$, $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1(in)} - \mathbf{V}$.

3. Для смешанных условий (заданы только нормальная составляющая V_n и тангенциальная составляющая $\mathbf{f}_\tau$) находится полная плотность поверхностных сил $\mathbf{f}$, затем используются формулы (22):

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\tau + \mathbf{n} \left(\rho c_1 V_n + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{n+1(in)}\mathbf{n} - \rho c_1 \mathbf{v}^{n+1(in)}) \right). \quad (24)$$

5.5 Контактные корректоры

Расчет контактной границы проводится следующим образом. Рассматриваются 2 типа контакта: полное слипание и свободное скольжение.

При полном слипании скорости на обеих поверхностях контакта совпадают при выполнении третьего закона Ньютона:

$$\mathbf{v}_a^{n+1} = \mathbf{v}_b^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_a^{n+1} \mathbf{n}_a = -\boldsymbol{\sigma}_b^{n+1} \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_a = -\mathbf{n}_b \quad (25)$$

где индексы a и b относятся к разным сторонам контакта.

Необходимо так подобрать скорость контакта $\mathbf{v}^{n+1}$, чтобы на контактной границе выполнялись условия (23) и (25). Окончательная расчетная формула имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+1} = & \frac{1}{\rho_a c_{a2} + \rho_b c_{b2}} \{ \rho_a [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_a^{n+1(in)}) (c_{a1} - c_{a2}) \mathbf{n} + c_{a2} \mathbf{v}_a^{n+1(in)}] + \\ & + \rho_b [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_b^{n+1(in)}) (c_{b1} - c_{b2}) \mathbf{n} + c_{b2} \mathbf{v}_b^{n+1(in)}] - \\ & - (\boldsymbol{\sigma}_a^{n+1(in)} - \boldsymbol{\sigma}_b^{n+1(in)}) \mathbf{n} - \\ & - \frac{\rho_a (c_{a1} - c_{a2}) + \rho_b (c_{b1} - c_{b2})}{\rho_a c_{a1} + \rho_b c_{b1}} \mathbf{n} \\ & (\mathbf{n} \cdot [\rho_a c_{a1} \mathbf{v}_a^{n+1(in)} + \rho_b c_{b1} \mathbf{v}_b^{n+1(in)} - (\boldsymbol{\sigma}_a^{n+1(in)} - \boldsymbol{\sigma}_b^{n+1(in)}) \mathbf{n}]) \}. \end{aligned} \quad (26)$$

Условия свободного скольжения имеют вид:

$$v_{an}^{n+1} = v_{bn}^{n+1} = v_n^{n+1}, \sigma_{an}^{n+1} = -\sigma_{bn}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{a\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{b\tau}^{n+1} = 0, \quad (27)$$

где нижние индексы n и τ означают нормальную и тангенциальную составляющие. Далее вычисляется v_n^{n+1} :

$$\begin{aligned} v_n^{n+1} = & \frac{1}{\rho_a c_{a2} + \rho_b c_{b2}} \\ & \left[\rho_a c_{a1} \mathbf{v}_a^{n+1(in)} + \rho_b c_{b1} \mathbf{v}_b^{n+1(in)} - (\boldsymbol{\sigma}_a^{n+1(in)} - \boldsymbol{\sigma}_b^{n+1(in)}) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (28)$$

после чего используются смешанные граничные условия (24).

При расчетах ударов считалось, что 2 узла контактируют, если расстояние между ними меньше $\approx 0.5h$, где h - размер ячейки, и относительно друг друга они сближаются. Иногда еще добавляют условие того, что при контакте напряжение должно быть сжимающим, но экспериментально было проверено, что добавление этого условия не только не улучшает картину, но даже добавляет некоторые артефакты и проблемы с моделированием отскока.

В проекции узла на отрезок другой сетки вводится мнимый узел и считается, что контактируют 2 узла по законам, описанным выше. Рас-

чет делается симметрично относительно контактирующих сеток, сначала рассматриваются узлы 1-ой и отрезки 2-ой, а затем наоборот.

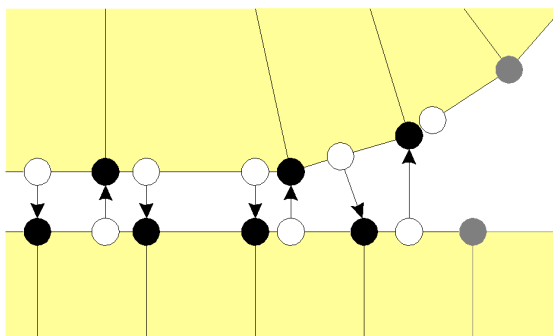


Рис. 2: Расчет контакта при ударе. Контактирующие узлы (черный цвет), свободные (серые) и мнимые (белые).

6 Модели разрушения

В данной работе используется дискретная модель разрушений. Следует заметить, что использованный численный метод также не сложно адаптировать к континуальным моделям разрушения [9]. Для каждого узла хранится параметр - разрушен он или нет. На каждом шаге для всех неразрушенных узлов проверяется критерий, который зависит только от напряжений, в результате чего узел может пометиться разрушенным. Далее делается корректировка скоростей и напряжений в зависимости от разрушений.

6.1 Модель сдвигового разрушения

В качестве критерия сдвигового разрушения рассматривается второй инвариант девиатора напряжений:

$$y_s < \sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - p)^2 + (\sigma_{yy} - p)^2 + (\sigma_{zz} - p)^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2}, \quad (29)$$

где $p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$ - среднее напряжение, y_s - константа.

Разрушенный материал представляется раздробленной средой. Такое представление обуславливает 2 свойства:

1. Отсутствие растягивающих напряжений ($D_i \leq 0$, где $\mathbf{D}$ - диагональный тензор главных напряжений, $i = x, y, z$).
2. В момент разрушения уменьшается модуль сдвига $\mu^{n+1} = \alpha \mu^n$ при сохранении модуля всестороннего сжатия. Соответственно, скорости звука c_1, c_2 будут иметь вид:

$$\begin{aligned} c_1^{n+1} &= \sqrt{c_1^{n2} - \frac{4}{3}c_2^{n2}(1 - \alpha)}, \\ c_2^{n+1} &= \sqrt{\alpha}c_2^n. \end{aligned} \quad (30)$$

В расчетах бралось $\alpha = 0.1$.

Данная модель использовалась в [10].

Корректировка на каждом шаге происходит в несколько этапов:

1. Переход к базису главных напряжений,

$$\mathbf{D}^n = \mathbf{W} \boldsymbol{\sigma}^n \mathbf{W}^T, \quad (31)$$

где $\mathbf{W}$ - матрица, составленная из собственных векторов тензора напряжения.

2. Положительные главные напряжения зануляются,

$$D_i^{n+1} = \min(0, D_i^n), i = x, y, z. \quad (32)$$

3. Осуществляется обратный переход,

$$\sigma^{n+1} = W^T D^{n+1} W. \quad (33)$$

Такая модель может быть использована при изучении разрушений хрупких материалов, подверженных дроблению, в том числе применима при моделировании сейсмостойкости сооружений.

6.1.1 Сейсмостойкость купола АЭС

Землетрясение описывается как одиночный цуг плоской волны, падающий из недр Земли перпендикулярно земной поверхности. Длина волны 3м, магнитуда 0.5м/с. Параметры грунта $c_1 = 3000$ м/с, $c_2 = 1500$ м/с, $\rho = 2500$ кг/м³.

Сооружения представляются монолитными бетонными конструкциями с параметрами $c_1 = 5000$ м/с, $c_2 = 3000$ м/с, $\rho = 4000$ кг/м³.

Купол АЭС имеет сложную структуру для обеспечения безопасности самого реактора. Он находится в центре и крепится на балках, по которым сейсмические волны практически не доходят. Крыша станции имеет форму купола также для большей сейсмоустойчивости. Высота станции 30м, толщина стен 4м.

Из расчетов рис. 3 видно, разрушение не доходит до реактора, что подтверждает правильность выбранной конструкции.

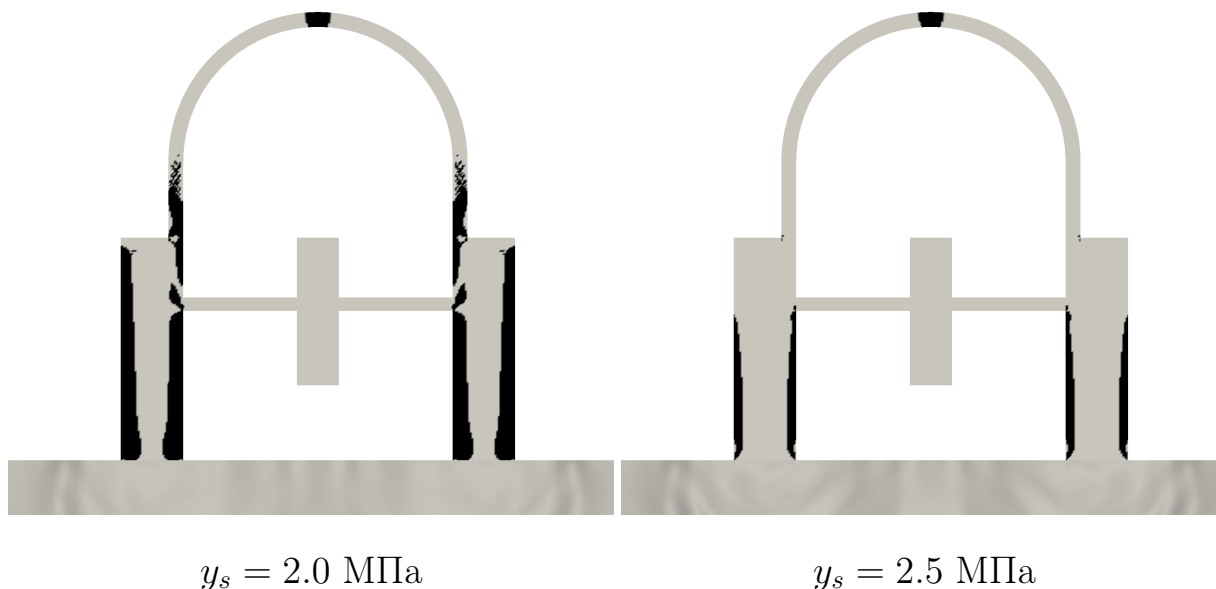


Рис. 3: Сейсмостойкость купольной конструкции при различных модулях сдвига бетона. Черным цветом показаны зоны разрушения.

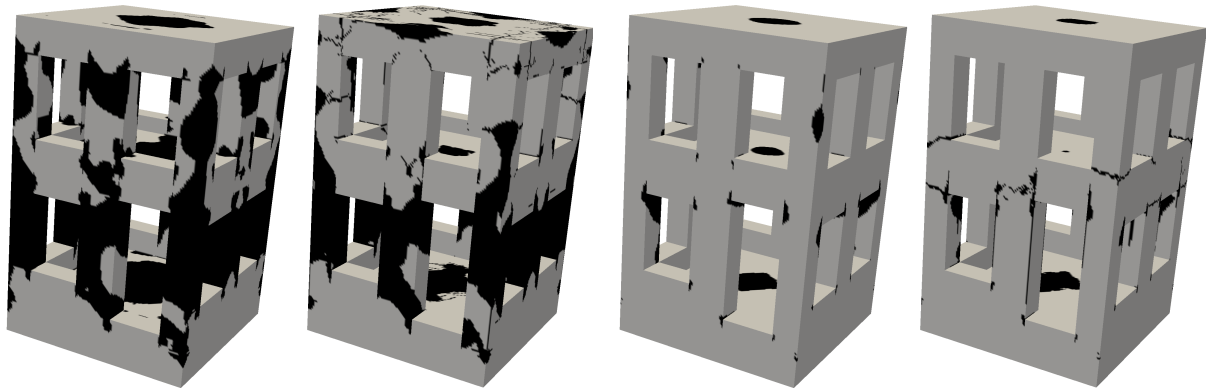
6.1.2 Сейсмостойкость двухэтажного жилого дома

Далее приведен расчет разрушения двухэтажного жилого дома с ленточным фундаментом (трёхмерный расчет). Толщина стен 40см, магнитуда землетрясения 0.1м/с, в 5 раз меньше, чем на предыдущем расчете. Проведено 2 серии расчетов для различных модулей прочности (1.0МПа и 1.5МПа).

На рисунках 4 показано сравнение картины разрушений без учета поправок, вызванных разрушившимися областями (слева) и с учетом (справа).

6.1.3 Взрыв круга из центра

Следующая задача на рис. 5 состоит в расчете внутреннего взрыва в двумерном случае. На внутренней стороне кольца, составленного из 4-х сеток, задаётся сила, направленная от центра. Наибольшим интересом и особенностью данной задачи является то, что, несмотря на использова-



$$y_s = 1.0 \text{ МПа}$$

$$y_s = 1.5 \text{ МПа}$$

Рис. 4: Сейсмостойкость двухэтажного жилого дома.

ние сдвиговой модели, явно выделяются трещины.

Расположение трещин связано с границами сеток, но не их кривизна. Можно считать, что неоднородность рядом с контактными границами есть случайная неоднородность материала кольца. В абсолютно однородном кольце таких трещин, понятное дело, не возникнет.



Рис. 5: Рост трещин в пластине.

6.2 Модель однобереговых трещин

Трещины моделируются следующим образом. Выбираются все узлы, расстояние от которых до трещины меньше $0.5h$, где h - размер ячеек.

В них записывается направление трещины, как показано на рисунке 6.

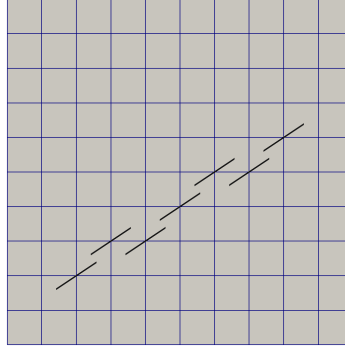


Рис. 6: Моделирование трещины на прямоугольной сетке.

Напряжения в узлах с трещинами должны удовлетворять свойству

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{d} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

где $\boldsymbol{d}$ - нормаль к трещице.

Критерий разрушения:

$$\sigma_0 < \max(D_i), \quad (35)$$

где σ_0 - максимальное напряжение (предел прочности на разрыв). При выполнении критерия образуется трещина, нормаль которой совпадает с максимальным растягивающим напряжением.

В одном узле может быть максимум $n - 1$ взаимно перпендикулярных трещины, где n - размерность пространства. Если же образуется n -ая трещина, то материал полностью разрушается (крошится) и дальнейшая корректировка идет согласно сдвиговой модели.

Введем понятие «базис трещин» - ортонормированный базис, в который входят нормали всех трещин, а выбор других векторов для дальнейшего алгоритма не принципиален. Матрица перехода к этому базису

Q строится таким образом, чтобы первые s её столбцов соответствовали трещинам, где s - количество трещин.

Алгоритм корректировки в однобереговой модели:

1. Переходим в базис трещин, в нем тензор напряжений уже не будет диагональным

$$S^n = Q\sigma^n Q^T, \quad (36)$$

2. Зануляем первые s столбцов и строк

$$S_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leq s \text{ или } j \leq s \\ S_{ij}^n, & \text{иначе} \end{cases} \quad (37)$$

3. Возвращаемся в исходный базис

$$\sigma^{n+1} = Q^T S^{n+1} Q. \quad (38)$$

Сжимающие напряжения в рассматриваемой модели не допускаются, релаксация трещин не рассматривается.

Далее приведены результаты расчетов с обезразмеренными параметрами ($7800 \text{ кг/м}^3 = 1$, $5700 \text{ м/с} = 1$, $5 \text{ мм} = 1$). Параметры стекла: $\rho = 0.3$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, прочность на разрыв $3 \cdot 10^{-4}$. Параметры стали: $\rho = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$.

Размер расчетных ячеек 0.01. Шаг интегрирования по времени 0.005.

6.2.1 Соударение стальной и стеклянных пластин

Толщина ударника 0.1, толщина пластины 1, скорость ударника 0.003, нижняя граница стекла - свободная. Из экспериментов известен эффект тыльного откола: при ударе по плите с одной стороны, происходит откол

материала с обратной. С физической точки зрения, откол происходит, когда фронт отраженной от задней границы волны встречается с задним фронтом падающей волны. Таким образом, толщина откольной чашечки равняется половине длины волны. При такой конфигурации удара длина волны составляет удвоенную ширину ударника. Следовательно, толщина откола должна в точности совпадать с шириной ударника. Этот эффект используется для тестирования алгоритма разрушений. Как видно из рис. 7, результаты численного моделирования хорошо соотносятся с экспериментальными данными.

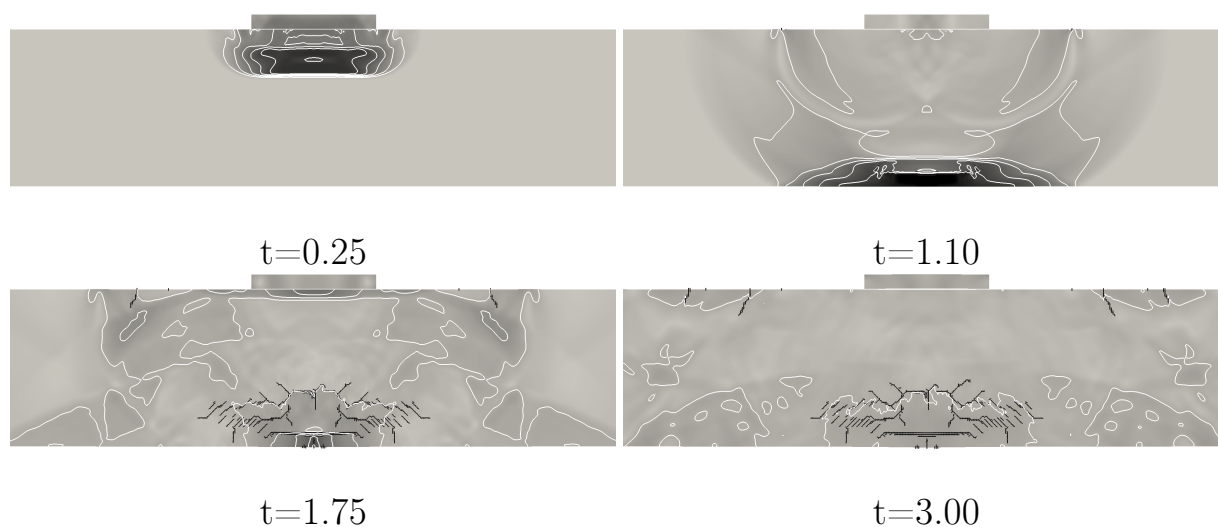


Рис. 7: Нормальный удар пластины о стекло в разные моменты времени. Черными линиями отмечены образовавшиеся трещины, белыми - изолинии скоростей. Насыщенность цвета соответствует также модулям скоростей.

6.2.2 Соударение стального шарика и стеклянной пластины

Диаметр ударника 0.5, скорость 0.006, толщина пластины 1. Граничные условия аналогичны предыдущему расчету. Из рис. 9 и рис. 10 можно заметить, что стекло раскалывается примерно пополам, что хорошо соотносится с экспериментом. Известно, что при ударе по стеклу, в

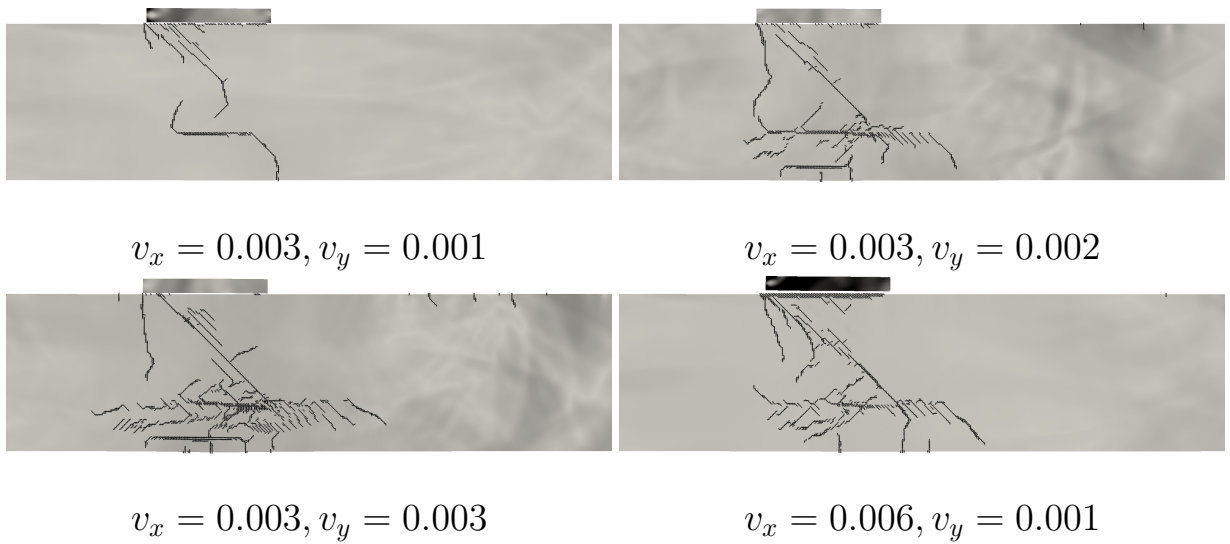


Рис. 8: Удар с различными скоростями и под различными углами. Компоненты скоростей ударника подписаны к каждому рисунку. Динамический контакт - условие слипания.

нем образуются кольцевые трещины вокруг места удара. В приведенном двумерном численном эксперименте тоже есть трещины, очень схожие с данным эффектом.



Рис. 9: Нормальный удар шарика о стекло (представлены картины разрушения в разные моменты времени). Черными линиями отмечены образовавшиеся трещины, белыми - изолинии скоростей. Насыщенность цвета соответствует также модулям скоростей.



$$v_x = 0, v_y = 0.004$$

$$v_x = 0.02, v_y = 0.004$$

Рис. 10: Сравнение прямого и скользящего без трения ударов.

6.2.3 Соударение двух шариков о стеклянную пластину

Диаметр каждого ударника 0.5, скорость 0.004, толщина пластины 1. Второй ударник падает спустя 0.0012 после первого. Граничные условия аналогичны предыдущему расчету. Результаты отображены на рис. 11. Интересно отметить, что первые трещины появляются сразу же после падения второго ударника, трещин больше справа.

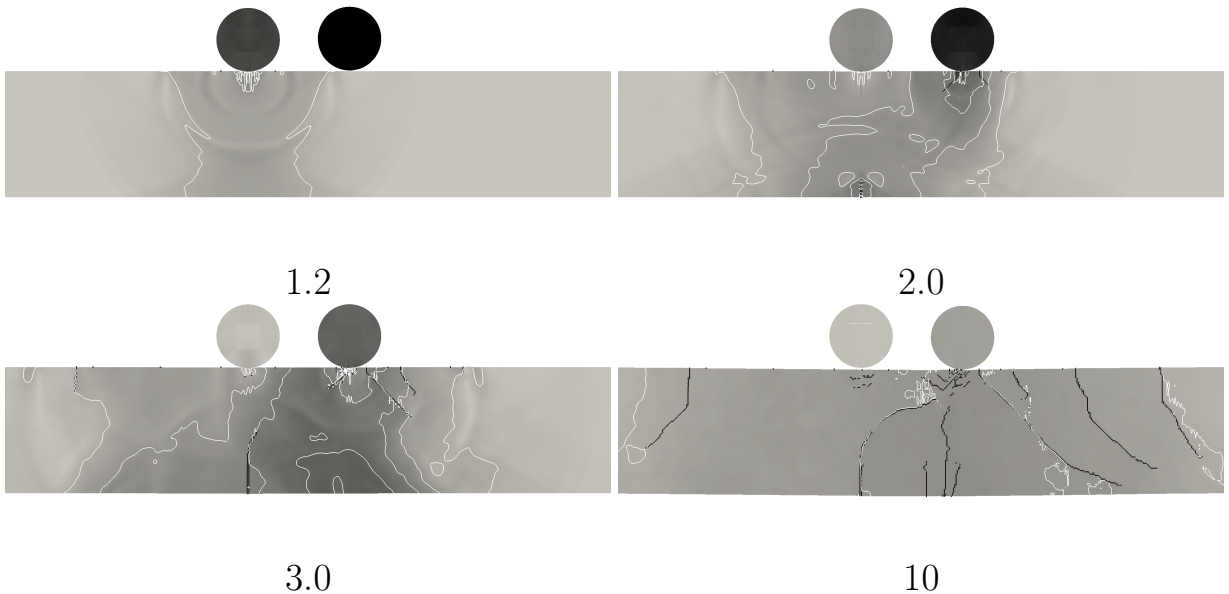


Рис. 11: Нормальный удар двух шариков с интервалом 0.0012.

6.2.4 Рост трещин при растяжении пластины

На рис. 12 приведен эксперимент с резким растяжением пластины (длина импульса в несколько раз меньше длины пластины), в которой

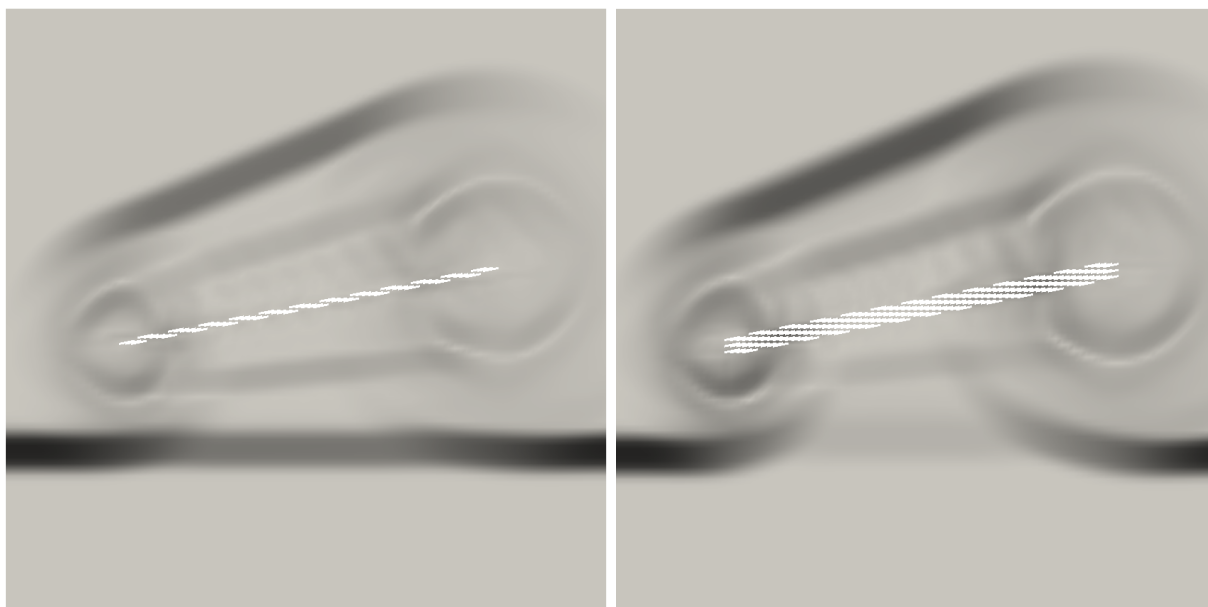
уже есть начальные трещины. Когда импульс доходит до начала или конца трещины, она прорастает.



Рис. 12: Рост трещин в пластине.

6.2.5 Отражение плоской волны от однобереговой трещины

Следующий расчет на рис. 13 показывает недостатки однобереговой модели трещин. Как видно, волна не полностью отражается, потому что условия корректировки отличаются от условий свободной границы. Для увеличения отраженной доли можно увеличивать ширину трещины, но настоящая свободная граница не получится все-равно.



трещина в одну ячейку

трещина в 3 ячейки

Рис. 13: Отражение плоской волны от однобереговой трещины.

6.3 Модель двухбереговых трещин

В разрушенных узлах вводится дополнительный узел (в текущей программной реализации все узлы сразу создаются сдвоенными) таким образом, что при расчете узлов слева от трещины используется один узел трещины, а справа - другой. Сама же трещина обсчитывается как граница сетки, по формулам 22.

Критерий разрушения используется такой же, как для однобереговых трещин. Это единственная из 3-х реализованных моделей, которая корректирует не только разрушенные узлы, но и соседние к ним. Поскольку используется 5-ти точечный шаблон, то пересчитываются значения в двух узлах с каждой стороны от разрушенного узла.

Результаты экспериментов показали, что данная модель работает хорошо когда трещины заданы в начальный момент и динамический рост не рассматривается. В случае же динамического роста трещин возникают артефакты, связанные с тем, что наличие трещины всего лишь в одном узле (появление трещины) координально меняет волновую картину в целом. Это не физично и не наблюдается в однобереговой модели, во первых потому что там корректируется только один узел, а во вторых, корректируется в меньшей степени.

Были попытки устранить артефакты и адаптировать модель для динамических трещин:

1. Узел может разрушиться, только если рядом уже разрушенный или вместе с ним.
2. Направление трещины выбирается с учетом направления в соседних узлах (берется среднее).

Но большого улучшения это не привнесло.

6.3.1 Кластер двухбереговых трещин

На рис. 14 показан расчет отражения плоской волны от наклонной трещины, с использованием двухбереговой модели трещин. Были опасения, что такое ступенчатое представление трещины смажет картину отражения, но, как видно, наблюдается чистое отражение, такое же как при расчете на криволинейной сетке (этот расчет не приведен).

На рис. 15 и рис. 16 приведен расчет модельной задачи для сейсморазведки. Как правило, внутри земной коры трещины располагаются параллельно друг другу, образуя кластер. В трещинах могут быть полезные ископаемые - природный газ или нефть, которые и представляют интерес для геологов. На основании отклика от кластера трещин можно определить параметры месторождения. Подобный расчет был проверен в [7] с использованием треугольных сеток, результаты качественно совпадают.

Таким образом, в этих задачах модель двухбереговых трещин на прямоугольных сетках проявила себя наилучшим образом.

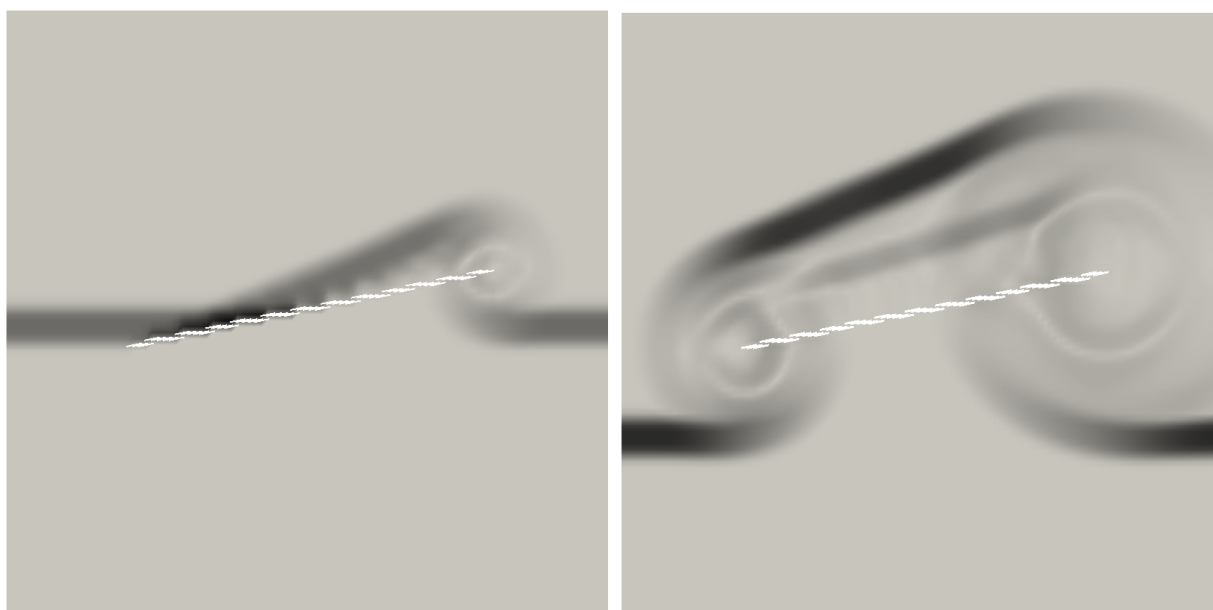


Рис. 14: Отражение плоской волны от газонасыщенной двухбереговой трещины.



Рис. 15: Прохождение плоской волны через кластер наклоненных газонасыщенных трещин.

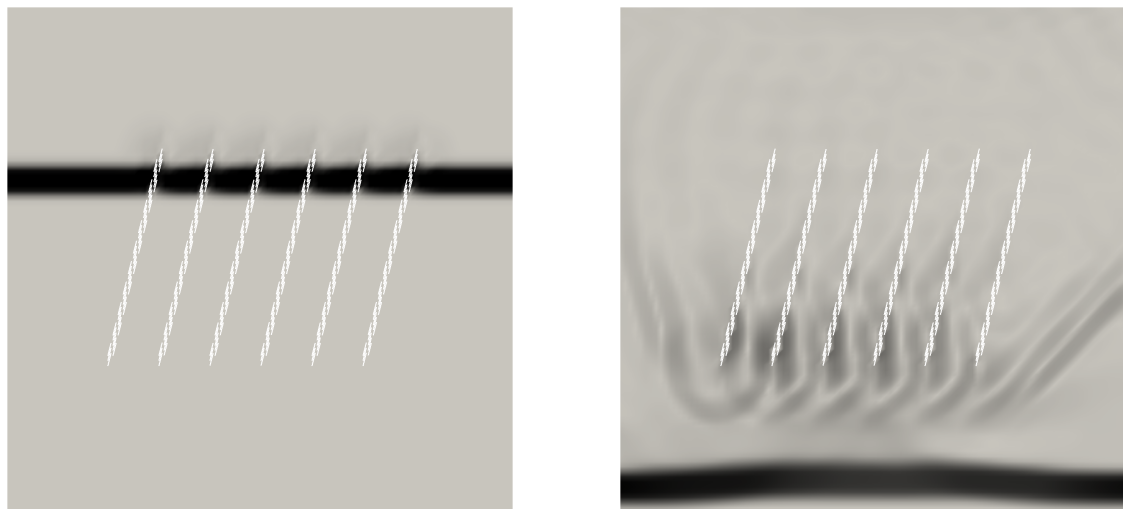


Рис. 16: Прохождение плоской волны через кластер наклоненных флюидонасыщенных трещин.

6.3.2 Прохождение плоской волны через флюидонасыщенные поры

У двухбереговой модели есть ещё одно важное применение, не связанное с трещинами. Это возможность моделировать границу раздела сред с использованием одной сетки. В этом случае два берега принадлежат различным материалам, а между ними накладываются контактные условия 25 или 27. На рис. 17 приведен расчет прохождения плоской волны через круглую флюидонасыщенную полость, в которой скорость звука меньше в 2 раза. Без использования данного метода пришлось бы использовать несколько криволинейных сеток, причем генерировать их нужно отдельно под каждую конкретную задачу. Здесь же мы можем использовать одну прямоугольную сетку при сколь угодно сложной структуре (рис. 18), которая обчисляется в разы быстрее при той же точности. Данный метод напоминает метод маркеров на эйлеровых сетках.

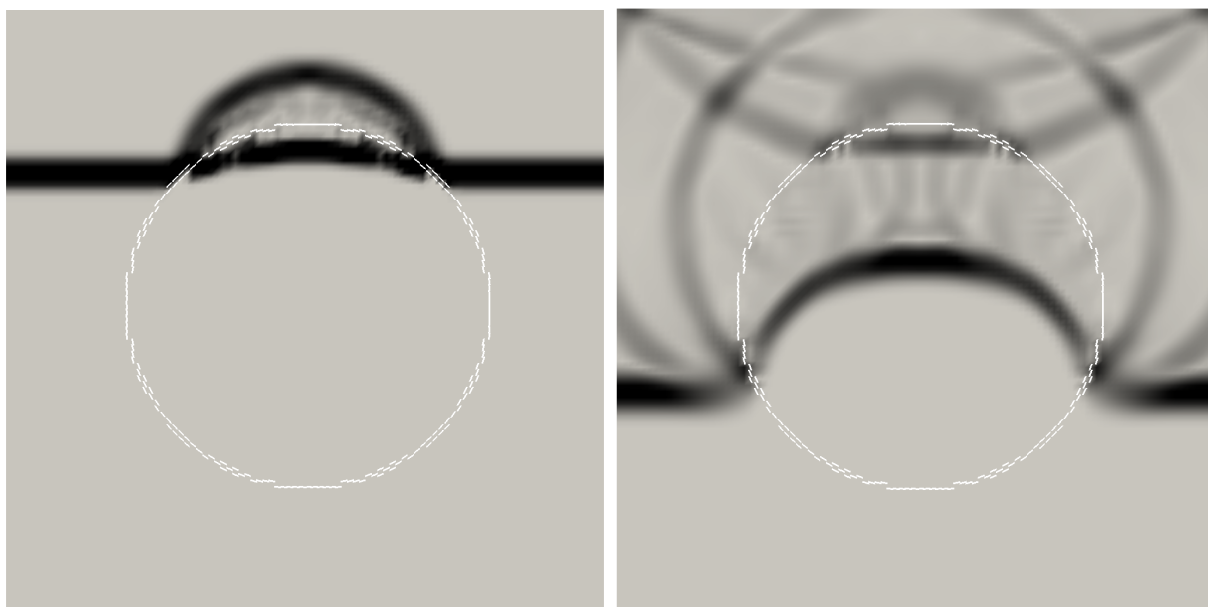


Рис. 17: Прохождение плоской волны через флюидонасыщенную полость.

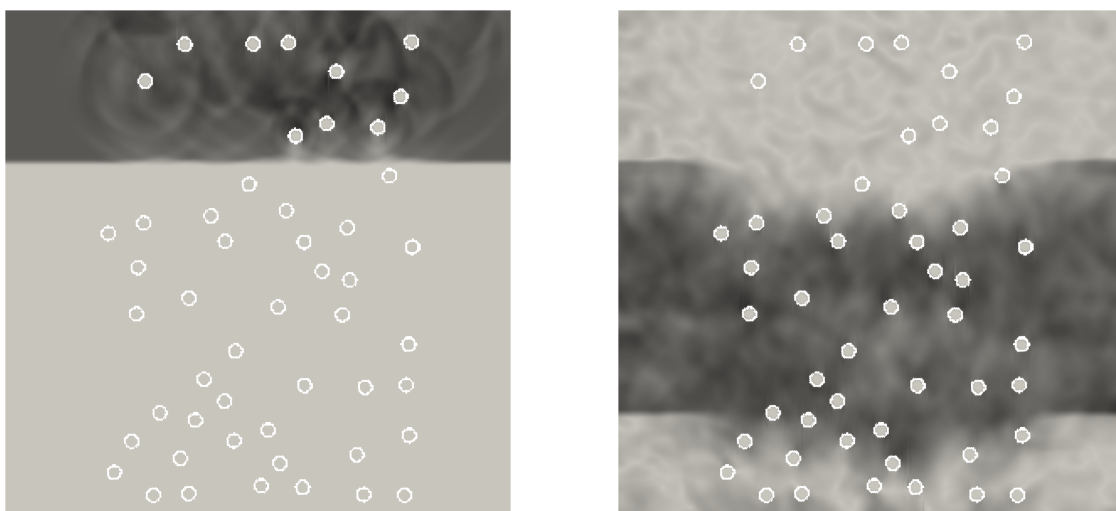


Рис. 18: Прохождение плоской волны через пористую среду. Справа - уже после отражения от нижней границы.

7 Заключение

В работе были рассмотрены три модели разрушения деформируемого твердого тела: модель сдвиговых разрушений, однобереговые трещины и двухбереговые. Модели адаптированы для численного решения прочностных задач используя сеточно-характеристический метод. Проведена серия тестовых расчетов, показывающая адекватное поведение данных моделей и определены наиболее удачные модели для каждой задачи. Для оценки сейсмостойкости - сдвиговая модель, для динамического роста трещин - однобереговые трещины, а для стационарных трещин или раздела сред - двухбереговые.

Результаты данной работы могут быть применены для оценки сейсмостойкости наземных сооружений, сейсморазведки или при моделировании различных столкновений, например, взаимодействие айсбергов с ледостойкими платформами.

Дальнейшая работа включает по данной теме в основном заключается в проведении и исследовании уже не тестовых, а реальных расчетов.

Список литературы

1. Майчен Дж., Сак С. Метод расчета «Тензор» // Вычисл. методы в гидродинамике. М.:Мир, 1967. С. 185-211.
2. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. №2. С. 373—386.
3. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно - характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. №5. С. 722 - 739.
4. Блажевич Ю.В., Иванов В.Д., Петров И.Б., Петвиашвили И.В. Моделирование высокоскоростного соударения методом гладких частиц // Матем. моделирование, 1999. – Т. 11, №1, С. 88–100.
5. А. М. Кривцов, И. Б. Волковец, П. В. Ткачев, В. А. Цаплин Применение метода динамики частиц для описания высокоскоростного разрушения твердых тел.
6. Н.Г.Бураго, В.Н.Кукуджанов О континуальном разрушении и локализации деформаций // Проблемы прочности и пластичности, Н.Новгород, 2001. Вып. 63, С. 40-48.

7. Левянт В.Б., Муратов М.В., Петров И.Б. Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин // Журнал Технологии сейсморазведки, 2012г., №1, с. 5-21.
8. М. В. Муратов, И. Б. Петров, А. В. Санников, А. В. Фаворская Сеточно-характеристический метод на неструктурированных тетраэдральных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, том 54, №5, с. 821–832.
9. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред // Физматлит, Москва, 2008, 320с.
10. Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Численное исследование волновых процессов и процессов разрушения в многослойных преградах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2003, Т. 43, №10, С. 1562 - 1579.
11. Петров И.Б., Тормасов А.Г. Численное исследование косоугольного соударения жесткого шарика с двухслойной упругопластической плитой // Матем. моделирование. — 1992. — Т. 4, №3. — С. 20 – 27.
12. Петров И.Б., Хохлов Н.И. Моделирование задач 3D сейсмики на высокопроизводительных системах.
13. Harten, A., Osher, S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes, 1987, SIAM J. Numer. Anal. 24 (2): 279–309.
14. Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Матем. моделирование, 1990, Т. 2, №11, С. 10–29.

15. Кондауров В. И. Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // Матем. моделирование. — 1988. — Т. 52, №2. — С. 302 – 310.
16. Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2006, Т. 46, №9, С. 1638–1667.
17. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН, сер. Механика твердого тела, №1, 2005, с. 45-87