

УДК 629.7

ДИНАМИКА СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И ПОСТОЯННОГО МОМЕНТОВ

© 2017 г. А. Д. Герман¹, С. А. Гутник^{2,3}, В. А. Сарычев⁴

¹Португалия, Ковильян, Университет Внутренней Бейры,

²Москва, МГИМО,

³Долгопрудный, МФТИ,

⁴ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

e-mail: anna@ubi.pt, s.gutnik@inno.mgimo.ru, vas31@rambler.ru

Поступила в редакцию 03.11.15 г.

После доработки 21.01.16 г.

Исследована динамика вращательного движения спутника, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите под действием гравитационного и постоянного моментов. Предложен метод определения всех положений равновесия (равновесных ориентаций) спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора постоянного момента и главных центральных моментов инерции, получены условия их существования. Проведена классификация областей с равным числом положений равновесия с применением алгебраических методов построения дискриминантных гиперповерхностей. Полученные в статье результаты могут быть использованы при создании гравитационных систем управления ориентацией искусственных спутников Земли.

DOI: 10.7868/S0002338816060056

Введение. Определение равновесных ориентаций искусственного спутника Земли, подверженного действию внешних возмущающих моментов, представляет значительный интерес. Знание положений равновесия спутника позволяет конструировать достаточно простые пассивные системы управления ориентацией. Важное свойство пассивных систем ориентации спутников заключается в их возможности функционировать на орбите продолжительное время без расходования энергии и (или) рабочего тела. Среди пассивных систем ориентации большое распространение получили гравитационные системы, принцип работы которых основан на том, что в центральном ньютоновом поле сил спутник с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите 24 положения равновесия, четыре из которых являются устойчивыми [1–3]. Подробное рассмотрение динамики спутников с гравитационными системами ориентации представлено в [4].

Данная работа посвящена исследованию положений равновесия спутника, на который кроме гравитационного момента действует постоянный в связанной со спутником системе координат момент (далее постоянный момент), обусловленный, например, истечением газа или рабочего тела из его корпуса. Влияние на спутник постоянного момента изменяет его ориентацию и может вывести систему из рабочего положения равновесия. Поэтому очень важно исследовать взаимное влияние гравитационного и постоянного моментов на положения равновесия спутника на круговой орбите.

Задаче определения положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов посвящено много работ. В [5–7] показано, что влияние малого постоянного момента на динамику спутника аналогично действию неконсервативного компонента аэродинамического момента. В [8] была показана возможность существования положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов для некоторых частных случаев.

Общий случай задачи был впервые изучен в [9], где представлены результаты символично-численного исследования положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов. Показано, что равновесия спутника определяются действительными корнями алгебраического уравнения шестой степени и возможно существование не более 24 положений равновесия в орбитальной системе координат.

В [10] с использованием подхода работы [9] был проведен детальный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесий спутника в пространстве параметров задачи. В [11, 12] была показана возможность применения методов компьютерной алгебры для исследования свойств системы нелинейных алгебраических уравнений, определяющих положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов. С использованием алгоритмов построения базисов Гребнера [13] и понятия результата было получено более простое по сравнению с [9] алгебраическое уравнение, определяющее положения равновесия спутника и построена гиперповерхность, задающая области с равным числом положений равновесия.

В настоящей статье проводится подробное исследование положений равновесия спутника с применением алгебраических методов, которые ранее успешно использовались для изучения положений равновесия спутника-гиростата в [14].

В разд. 1 данной работы предложена постановка задачи, приведены уравнения вращательного движения спутника под действием гравитационного и постоянного моментов. В разд. 2 рассмотрен метод определения положений равновесия спутника, основанный на алгоритмах компьютерной алгебры. В разд. 3 проведено подробное исследование условий существования положений равновесия спутника. В разд. 4 приведены результаты исследования эволюции областей с различным числом положений равновесий спутника в зависимости от трех безразмерных параметров задачи.

1. Уравнения движения. Рассмотрим движение спутника по круговой орбите. Пусть на спутник, кроме гравитационного момента, действует постоянный момент, обусловленный, например, истечением газа из корпуса спутника. Для записи уравнений движения введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника. Орбитальную систему координат — $OXYZ$, ось OZ которой направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OX — вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника. Тогда ось OY будет направлена вдоль нормали к плоскости орбиты. Связанную со спутником систему координат — $Oxyz$; здесь Ox , Oy , Oz — главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием самолетных углов тангажа α , рыскания β и крена γ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы с помощью соотношений [4]:

$$\begin{array}{ccc} & x & y & z \\ X & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Z & a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, \\ a_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta, \\ a_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При малых колебаниях спутника углу тангажа соответствует поворот вокруг оси OY , углу рыскания — поворот вокруг оси OZ , углу крена — поворот вокруг оси OX .

Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [4, 9]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \tilde{a} &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \tilde{b} &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \tilde{c} &= 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
 p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma}, \\
 q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma, \\
 r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.2), (1.3) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r , $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ – проекции абсолютной угловой скорости спутника и проекции вектора постоянного момента на оси Ox, Oy, Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

2. Положения равновесия спутника. Введем обозначения $a = \tilde{a}/\omega_0^2(C - B)$, $b = \tilde{b}/\omega_0^2(A - C)$, $c = \tilde{c}/\omega_0^2(B - A)$.

Положив в (1.2) и (1.3) $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, получим при $A \neq B \neq C$ и введенных выше обозначениях следующие уравнения

$$\begin{aligned}
 a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} - a &= 0, \\
 a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} - b &= 0, \\
 a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} - c &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. С учетом (1.1) систему (2.1) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Другой способ замыкания уравнений (2.1) заключается в добавлении условий ортогональности направляющих косинусов (1.1)

$$\begin{aligned}
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1) и (2.2) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных a, b, c требуется определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. После нахождения шести направляющих косинусов $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ оставшиеся направляющие косинусы a_{11}, a_{12}, a_{13} можно определить из условий ортогональности. Следует отметить, что для любой заданной ориентации спутника всегда существуют такие a, b и c , что эта ориентация является положением равновесия.

В [9] было показано, что система (2.1) с использованием выражений направляющих косинусов через самолетные углы (1.1) и понятия результианта может быть сведена к одному алгебраическому уравнению шестой степени от одной неизвестной с коэффициентами, представляющими собой полиномы от трех безразмерных параметров задачи a, b и c . Было доказано, что каждому корню полученного алгебраического уравнения соответствуют четыре равновесные ориентации спутника и соответственно для спутника с заданными a, b и c на круговой орбите существуют не более 24 положений равновесия в орбитальной системе координат. В [10] с использованием подхода работы [9] были рассмотрены частные случаи задачи, когда вектор постоянного момента параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника (например, $a \neq 0, b = c = 0$) и когда две проекции вектора постоянного момента равны ($a \neq 0, b = c$). В общем случае был проведен подробный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесий спутника в пространстве параметров задачи.

Настоящая работа является продолжением статьи [11], где с применением методов компьютерной алгебры было проведено исследование свойств системы алгебраических уравнений (2.1), (2.2) и построена гиперповерхность, задающая области с равным числом положений равновесия спутника.

В предлагаемой статье главное внимание уделено исследованию условий существования различного числа положений равновесия спутника.

Следуя [11], рассмотрим подробнее системы (2.1) и (2.2), которые образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести неизвестных направляющих косинусов,

определяющих положения равновесия спутника. Решение системы (2.1) и (2.2) можно получить, используя алгоритм построения базисов Гребнера [13] с применением системы символьных вычислений Maple [15]. Метод построения базисов Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае полиномов многих переменных к рассмотрению полинома одной переменной. Возможность применения алгоритмов построения базисов Гребнера для решения системы (2.1) и (2.2) впервые была показана в работах [9, 12].

Применяя систему символьных вычислений Maple, построим базис Гребнера полиномов (2.1) и (2.2) относительно упорядочения по полной степени переменных, выпишем полиномы из базиса Гребнера, зависящие только от четырех переменных a_{22} , a_{31} , a_{32} , a_{33} :

$$\begin{aligned} & ba_{22}^2 - 3ba_{32}^2 + 12a_{31}a_{33} - ac + 3b = 0, \\ & 144a_{32}^2a_{33}^2 + (84a - 24bc)a_{32}a_{33} + 12a^2(a_{32}^2 + a_{33}^2) + a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - 7abc = 0, \\ & 12ca_{33}^3 + 12ba_{32}a_{33}^2 - b(c^2 + 12)a_{32} - c(b^2 + 12)a_{33} + 12ca_{33}a_{32}^2 + 12ba_{32}^3 + (ac^2 + ab^2 - 7bc)a_{31} = 0, \\ & 12aa_{31}a_{33}^2 + 12ba_{32}a_{33}^2 + a^2ba_{32} + ab^2a_{31} - (cb^2 + ca^2 - 7ab)a_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Построив теперь базис Гребнера системы полиномов (2.3) относительно лексикографического упорядочения переменных, получим алгебраическое уравнение шестого порядка относительно только одной переменной $x = a_{33}^2$:

$$P(x) = p_0x^6 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 12^6, \\ p_1 &= -2 \times 12^6, \\ p_2 &= 12^4(25v - 6u^2 - 28uc + 144), \\ p_3 &= -2 \times 12^3(8c^2u^2 + u^2v - 24u^2 - 7cuv - 168uc - c^2v^2 + 150v), \\ p_4 &= 12^2(144v^2 - 51u^2v + 337u^2 + 28cuv^2 - 28cu^3 + 25c^2v^2 + 192c^2u^2 + 518cuv), \\ p_5 &= 24(12u^2v^2 - 62u^4 - 150u^2v + 3u^4v + 3c^2u^2v^2 + 84cuv^2 + 182cu^3 - \\ & \quad - 7cu^3v - 136c^2u^2 + 14c^3uv^2), \\ p_6 &= (c^2v^2 + vu^2 + 12u^2 - 7cuv)^2, \quad v = a^2 + b^2, \quad u = ab. \end{aligned}$$

Уравнение (2.4) с использованием метода построения базисов Гребнера получено впервые. В [11] система (2.1) и (2.2) с применением другого порядка лексикографического упорядочения при построении базиса Гребнера была приведена к более простому по сравнению с (2.4) уравнению шестого порядка относительно переменной a_{23}^2 . Однако для проведения исследования равновесных решений удобнее использовать уравнение (2.4) относительно переменной a_{33}^2 . В [9] система (2.1) с использованием выражений направляющих косинусов через самолетные углы (1.1) была приведена к более сложному по сравнению с (2.4) алгебраическому уравнению шестого порядка относительно переменной $x = 1 + \sin^2\alpha$.

Уравнение (2.4) совместно с (2.1) и (2.3) позволяет определить все положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов. Отметим, что число действительных корней алгебраического уравнения (2.4) четно и не превышает шести. Покажем, что каждому действительному корню x уравнения (2.4) соответствуют четыре равновесных решения исходной системы (2.1), (2.2). Действительно, для каждого решения $x = a_{33}^2$ уравнения (2.4) можно найти два значения a_{33} , а затем из последних трех уравнений системы (2.3) однозначно определить соответствующие им величины a_{31} и a_{32} . Далее, для каждого набора направляющих косинусов a_{31} , a_{32} , a_{33} из первого уравнения системы (2.3) можно определить два значения a_{22} и из системы (2.1) — соответствующие им величины a_{21} и a_{23} . После того как набор из шести значений a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{31} , a_{32} , a_{33} найден, три оставшиеся величины a_{11} , a_{12} , a_{13} одно-

значно определяются из условий ортогональности направляющих косинусов. Из приведенных рассуждений следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и постоянного момента в общем случае ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$) может иметь не более 24 положений равновесия.

Анализ частных случаев задачи, когда вектор постоянного момента параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника (например, $a \neq 0, b = c = 0$), проводился в [9]. Случай, когда две проекции вектора постоянного момента равны по величине и отличны от нуля ($a \neq 0, b = c$), подробно рассмотрен в работе [10].

3. Условия существования положений равновесия спутника. Уравнения (2.1)–(2.4) позволяют определить все положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов, при заданных значениях безразмерных параметров задачи a, b и c .

При исследовании положений равновесия спутника ставится задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (2.4). Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней воспользуемся теоремой Меймана [16], из которой следует, что разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней определяется дискриминантной гиперповерхностью. В нашем случае дискриминантная гиперповерхность задается дискриминантом многочлена (2.4). Эта гиперповерхность содержит компоненту коразмерности 1, которая является границей областей с одинаковым числом вещественных корней. Множество особых точек дискриминантной гиперповерхности в пространстве параметров a, b и c задается следующей системой алгебраических уравнений:

$$P(x) = 0, \quad P'(x) = 0. \quad (3.1)$$

Символом “штрих” обозначено дифференцирование по переменной x .

Исключим переменную x из системы (3.1) путем вычисления определителя матрицы результата уравнений (3.1) с помощью символьных матричных функций системы Maple и получим в результате алгебраическое уравнение дискриминантной гиперповерхности в следующем виде:

$$(a^2 - b^2)^6 P_1^2(a, b, c) P_2(a, b, c) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $P_1(a, b, c)$ и $P_2(a, b, c)$ – полиномы 9-й и 10-й степени соответственно относительно a . Полином $P_1(a, b, c)$ имеет вид

$$P_1(a, b, c) = p_{1,0}a^9 + p_{1,1}a^8 + p_{1,2}a^7 + p_{1,3}a^6 + p_{1,4}a^5 + p_{1,5}a^4 + p_{1,6}a^3 + p_{1,7}a^2 + p_{1,8}a + p_{1,9}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= 8b^3c^3, & p_{1,1} &= 7[49(b^4 + c^4) - 2b^2c^2(12c^2 - 6b^2 - 1)], \\ p_{1,2} &= -4bc[2b^4c^2 + 49(25c^2 - 72) + b^2(16c^4 + 636c^2 - 1813)], \\ p_{1,3} &= 14b^2[b^4(12c^2 - 49) + b^2(100c^4 + 393c^2 - 2401) + 2c^4 + 1035c^2 - 3528], \\ p_{1,4} &= -4b^3c[2b^4c^2 + 2b^2(16c^4 + 932c^2 - 2989) - 1029c^2 + 5929], \\ p_{1,5} &= -7b^4[b^4(12c^2 - 49) - b^2(200c^4 + 786c^2 - 4802) + 90c^4 + 2964c^2 - 16513], \\ p_{1,6} &= 4b^5c[2b^4c^2 - b^2(16c^4 + 636c^2 - 1813) + 49(21c^2 - 121)], \\ p_{1,7} &= 14b^6[2c^4(6b^2 + 1) - c^2(b^2 - 1035) - 3528], \\ p_{1,8} &= 196b^7c(72 - 25c^2), & p_{1,9} &= 343b^8c^4. \end{aligned}$$

$P_2(a, b, c)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_2(a, b, c) &= p_{2,0}a^{10} + p_{2,1}a^9 + p_{2,2}a^8 + p_{2,3}a^7 + p_{2,4}a^6 + \\ &+ p_{2,5}a^5 + p_{2,6}a^4 + p_{2,7}a^3 + p_{2,8}a^2 + p_{2,9}a + p_{2,10}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 p_{2,0} &= 729(b^2 + c^2)^4, \quad p_{2,1} = 15120bc(b^2 + c^2)^2, \\
 p_{2,2} &= 729b^{10} + 243b^8(24c^2 - 13) + 27b^6(513c^4 - 1638c^2 - 676) + \\
 &+ b^4(13851c^6 - 82134c^4 + 91260c^2 + 27376) + b^2c^2(5832c^6 - 44226c^4 + 91260c^2 - 7456) + \\
 &+ c^4(729c^6 - 3159c^4 - 18252c^2 + 27376), \\
 p_{2,3} &= 70bc(405b^6 + 9b^4(75c^2 - 338) + b^2(675c^4 - 3276c^2 + 2704) + 405c^6 - \\
 &- 3042c^4 + 2704c^2 - 1152), \\
 p_{2,4} &= 2916b^{10}c^2 + 27b^8(513c^4 - 1638c^2 - 676) + \\
 &+ b^6(21870c^6 - 167427c^4 + 314847c^2 + 132619) + \\
 &+ b^4(13851c^8 - 167427c^6 + 771147c^4 - 903619c^2 - 118976) + \\
 &+ b^2(2916c^{10} - 44226c^8 + 314847c^6 - 903619c^4 + 522288c^2 - 97344) + \\
 &- 18252c^8 + 132619c^6 - 118976c^4 - 97344c^2 + 20736, \\
 p_{2,5} &= 70bc(216b^8 + 9b^6(75c^2 - 338) + b^4(891c^4 - 3276c^2 + 15041) + \\
 &+ b^2(675c^6 - 3276c^4 + 11492c^2 - 18440) + \\
 &+ 216c^8 - 3042c^6 + 15041c^4 - 18440c^2 + 7488), \\
 p_{2,6} &= 4374b^{10}c^4 + b^8(13851c^6 - 82134c^4 + 91260c^2 + 27376) + \\
 &+ b^6(13851c^8 - 167427c^6 + 771147c^4 - 903619c^2 - 118976) + \\
 &+ b^4(4374c^{10} - 82134c^8 + 771147c^6 - 2647224c^4 + 3452995c^2 - 170183) + \\
 &+ b^2(91260c^8 - 903619c^6 + 3452995c^4 - 3298542c^2 + 648288) + \\
 &+ 27376c^8 - 118976c^6 - 170183c^4 + 648288c^2 - 134784, \\
 p_{2,7} &= 70bc(432b^8c^2 + b^6(675c^4 - 3276c^2 + 2704) + b^4(675c^6 - 3276c^4 + 11492c^2 - 18440) + \\
 &+ b^2(432c^8 - 3276c^6 + 11492c^4 - 11306c^2 + 29497) + 2704c^6 - 18440c^4 + 29497c^2 - 12168), \\
 p_{2,8} &= 2916b^{10}c^6 + b^8c^2(5832c^6 - 44226c^4 + 91260c^2 - 7456) + \\
 &+ b^6(2916c^{10} - 44226c^8 + 314847c^6 - 903619c^4 + 522288c^2 - 97344) + \\
 &+ b^4(91260c^8 - 903619c^6 + 3452995c^4 - 3298542c^2 + 648288) + \\
 &+ b^2(7456c^8 + 522288c^6 - 3298542c^4 + 4826593c^2 - 1045044) - \\
 &- 36(2704c^6 - 18008c^4 + 29029c^2 - 6084), \\
 p_{2,9} &= 70bc(216b^8c^4 + b^6(405c^6 - 3042c^4 + 2704c^2 - 1152) + \\
 &+ b^4(216c^8 - 3042c^6 + 15041c^4 - 18440c^2 + 7488) + \\
 &+ b^2(2704c^6 - 18440c^4 + 29497c^2 - 12168) - 72(c^2(4c^2 - 13)^2 - 54), \\
 p_{2,10} &= 729b^{10}c^8 + b^8c^4(729c^6 - 3159c^4 - 18252c^2 + 27376) - \\
 &- b^6(18252c^8 - 132619c^6 + 118976c^4 + 97344c^2 - 20736) + \\
 &+ b^4(27376c^8 - 118976c^6 - 170183c^4 + 648288c^2 - 134784) - \\
 &- 36b^2(2704c^6 - 18008c^4 + 29029c^2 - 6084) + 1296(c^2(4c^2 - 13)^2 - 36).
 \end{aligned}$$

Теперь мы должны проверить, как изменяется число равновесий при пересечении одной из поверхностей (3.2). Это можно сделать численно, определив число равновесий в одной точке из каждой области $P_1(a, b, c) = 0$ и $P_2(a, b, c) = 0$ в пространстве параметров a , b и c .

Численный анализ показал, что только поверхность $P_2(a, b, c) = 0$ разделяет области с различным числом действительных корней уравнения (2.4). При пересечении границ поверхности $P_1(a, b, c) = 0$ смены числа действительных корней уравнения (2.4) не происходит. Случай $a^2 = b^2$ аналогичен случаю $b^2 = c^2$ и отдельно был рассмотрен в [10].

4. Исследование положений равновесия спутника. Уравнения (2.3) и (2.4) совместно с системой (2.1), (2.2) позволяют определить все положения равновесия спутника при заданных значениях компонент вектора постоянного момента. Для исследования эволюции областей существования различного числа положений равновесия в зависимости от величины модуля вектора постоянного момента в пространстве безразмерных параметров a, b и c проведем подробный анализ поверхности $P_2(a, b, c) = 0$. Области изменения параметров a, b, c ограничены следующими неравенствами [9]:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 5, \quad a^2 + b^2 \leq 4, \quad a^2 + c^2 \leq 4, \quad b^2 + c^2 \leq 4. \quad (4.1)$$

Из вида коэффициентов уравнения (2.4) следует, что параметры a и b входят в них симметрично. В слагаемых коэффициентов p_i можно выделить сомножитель abc таким образом, что a, b и c будут входить в выражения коэффициентов только в четных степенях, поэтому замена $a \rightarrow -a$ приведет к симметричному повороту области распределения числа равновесных решений относительно либо оси b , либо оси c . Поэтому для численного исследования корней уравнения (2.4) достаточно рассмотреть область изменения параметров, ограниченную первым неравенством (4.1) и неравенствами

$$-2 \leq a \leq 0, \quad -2 \leq b \leq 2, \quad -2 \leq c \leq 2; \quad (4.2)$$

тогда в плоскости (b, c) при фиксированной величине a в силу симметрии можно ограничиться значениями параметров в секторе, ограниченном прямыми $c = b$ и $c = 0$. На диагонали квадрата $|b| \leq 2, |c| \leq 2$ при $|b| = |c|$ существует дополнительное ограничение $|b| \leq \sqrt{2}$. Зависимость числа действительных решений уравнения (2.4) от параметров определялась с учетом указанных ограничений, причем некоторые результаты классификации распределения числа действительных корней от величины параметров в области (4.1), (4.2) из работы [10] применялись для данного исследования.

Результаты численно-аналитического анализа свойств и формы дискриминантной гиперповерхности $P_2(a, b, c) = 0$ наряду с непосредственным определением числа положений равновесия внутри куба (4.2), представляющие собой двухмерные сечения поверхности в плоскости (b, c) при фиксированном значении параметра a , приведены ниже. Было определено, что большая часть областей с заданным числом положений равновесия образуются или исчезают на диагонали $|b| = |c|$ квадрата $|b| \leq 2, |c| \leq 2$. Значения параметра a , при которых происходит качественное изменение формы, взаимного расположения и числа областей с заданным числом положений равновесия, определим как бифуркационные. Часть бифуркационных значений параметра a была найдена аналитически при рассмотрении частных случаев задачи [10], другая часть получена численно. Результаты вычислений бифуркационных значений параметра a представлены в таблице,

Бифуркационные значения a

a	24	16	8	0
-2	—	—	1 точка	1 область
$(-35 + \sqrt{193})/12$	—	2 точки	1 область	1 область
-3/2	—	2 области	2 области	1 область
$(-25 + \sqrt{73})/12$	—	3 области	2 области	1 область
-7/6	4 области	11 областей	2 области	1 область
$-(2 + \sqrt{22})/6$	2 области	9 областей	2 области	1 область
-1	2 области	9 областей	2 области	1 область
-35/39	—	5 областей	2 точки	2 точки
-2/3	—	5 областей	4 области	3 области
-1/2	—	5 областей	2 области	1 область
-1/2	2 области	6 областей	2 области	2 точки
$(2 - \sqrt{22})/6$	1 область	4 области	2 области	1 область
0	1 область	4 области	2 области	1 область
0	1 область	4 области	1 область	1 область

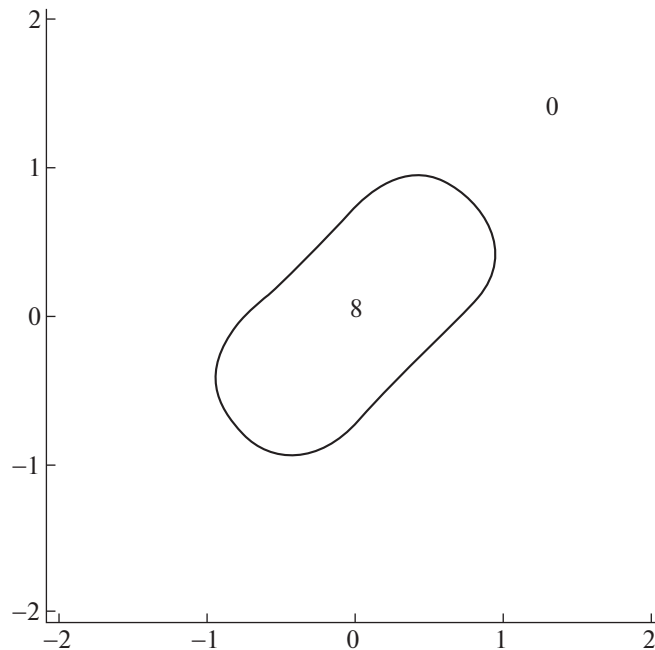


Рис. 1. Области для $a = (-35 + \sqrt{193})/12$

где указано число областей либо отдельных точек с фиксированным числом равновесий для каждого бифуркационного значения параметра.

На рис. 1–8 показаны результаты распределения областей с равным числом положений равновесия в случаях, когда происходит существенное изменение их характеристик. Классификация распределений была выполнена для значений a из диапазона $-2 \leq a \leq 0$, так как замена $a \rightarrow -a$ приведет к симметричному повороту области распределения числа равновесных решений относительно диагонали $|b| = |c|$, осей b и c . На рисунках изображены области с фиксированным числом положений равновесия в плоскости (b, c) (здесь b – вертикальная ось, c – горизонтальная ось), а границы областей представляют собой сечения поверхности $P_2(a, b, c) = 0$ плоскостью $a = \text{const}$. На рисунках обозначены области, в которых существуют 24, 16, 8 положений равновесия, и области, в которых равновесия не существуют (символ 0).

Первое бифуркационное значение $a = -2$. В этом случае существуют 4 равновесия при $b = c = 0$. В интервале $-2 \leq a \leq (-35 + \sqrt{193})/12$ существует только одна область с числом равновесий, равным 8. Второе бифуркационное значение $a = (-35 + \sqrt{193})/12 \approx -1.759$ (рис. 1). При этом значении существует область с числом равновесий, равным 8, и появляются две точки, где существуют 16 равновесий. В интервале $(-35 + \sqrt{193})/12 \leq a \leq -3/2$ существует одна область с числом равновесий, равным 8, и одна область с числом равновесий, равным 16. При значении $a = -3/2$ существуют две области с числом равновесий, равным 8, и две области с числом равновесий, равным 16. Эти области пересекаются в точке $b = c = 0$ (рис. 2). При значении $a = (-25 + \sqrt{73})/12$ на диагонали $b = \pm c$ появляются две новые области с числом равновесий, равным 16. В следующей точке бифуркации $a = -7/6$ появляются четыре области с числом равновесий, равным 24. При значении $a = -1$ (рис. 3) существуют две области с числом равновесий, равным 24, девять областей с числом равновесий, равным 16, две области с числом равновесий, равным 8, и появляются две отдельные точки на диагонали $b = c = \pm 1$ с числом равновесий, равным 8, в окрестности которых при дальнейшем увеличении параметра a до значения $a = -2/3$ возникают две области с числом равновесий, равным 8, и две смежные с ними области, где равновесия не существуют. На рис. 3 в центре области с числом равновесий, равным 16, и в углах квадрата более светлой линией показаны границы пересечения плоскости $a = -1$ с поверхностью

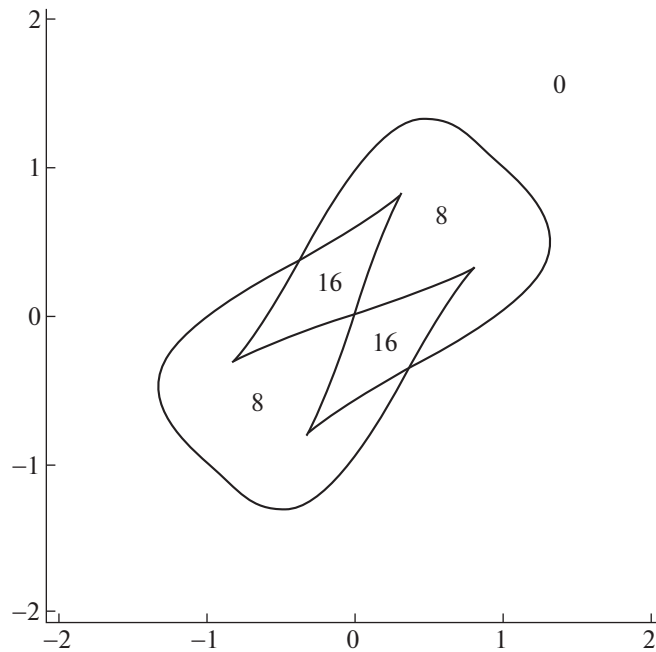


Рис. 2. Области для $a = -3/2$

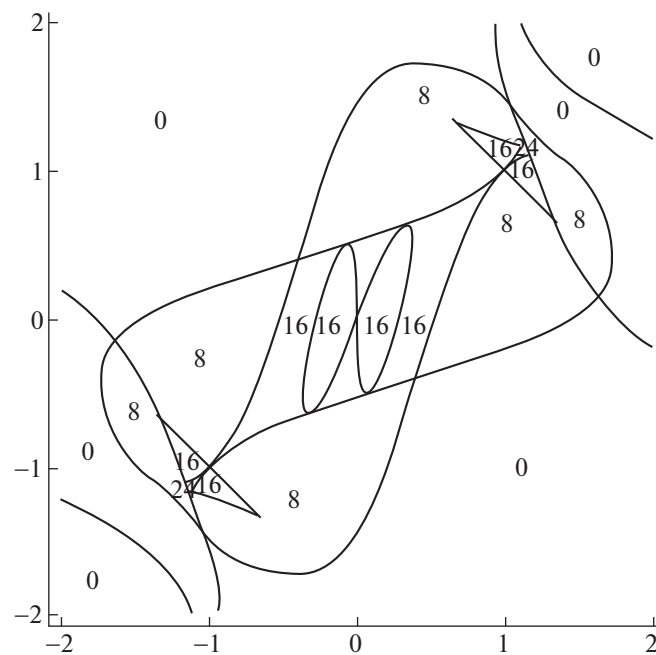
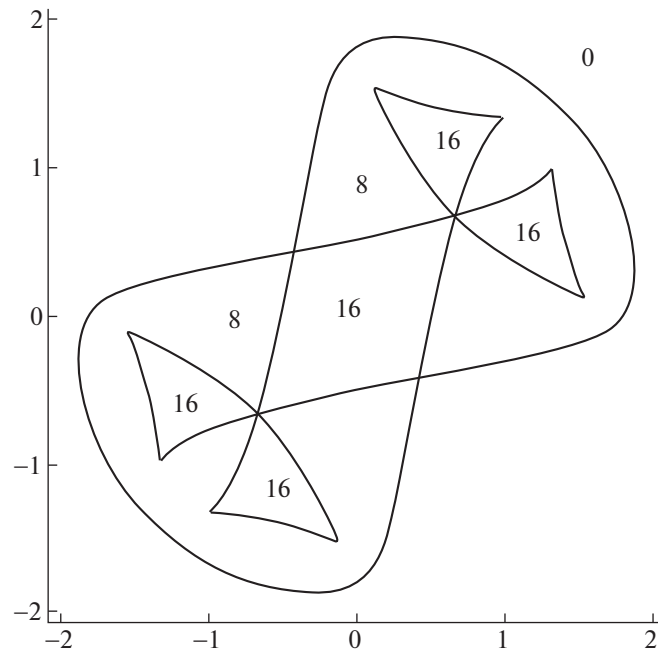
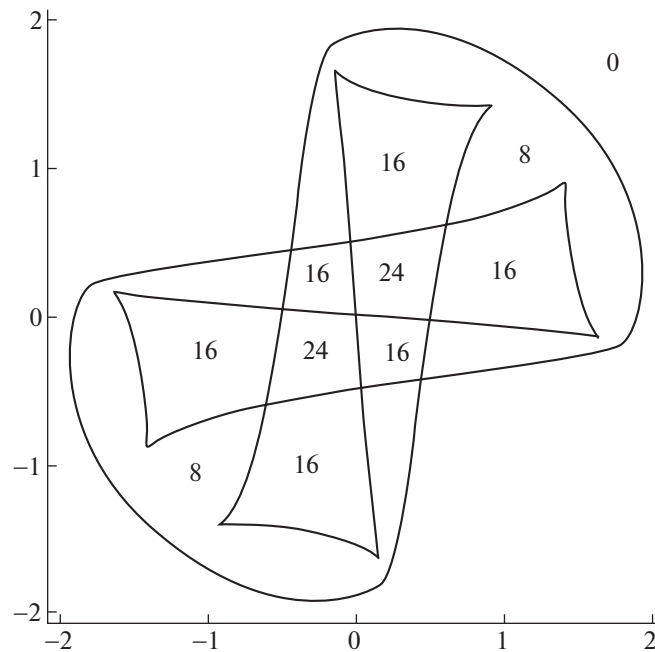


Рис. 3. Области для $a = -1$

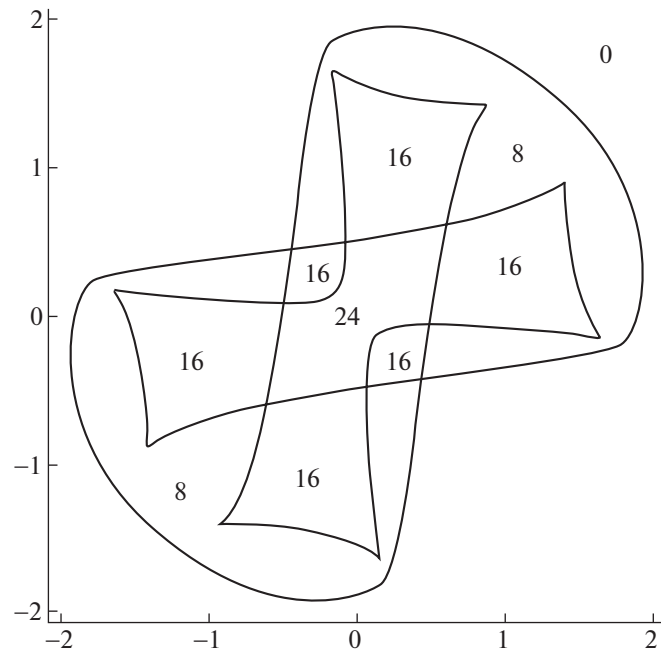
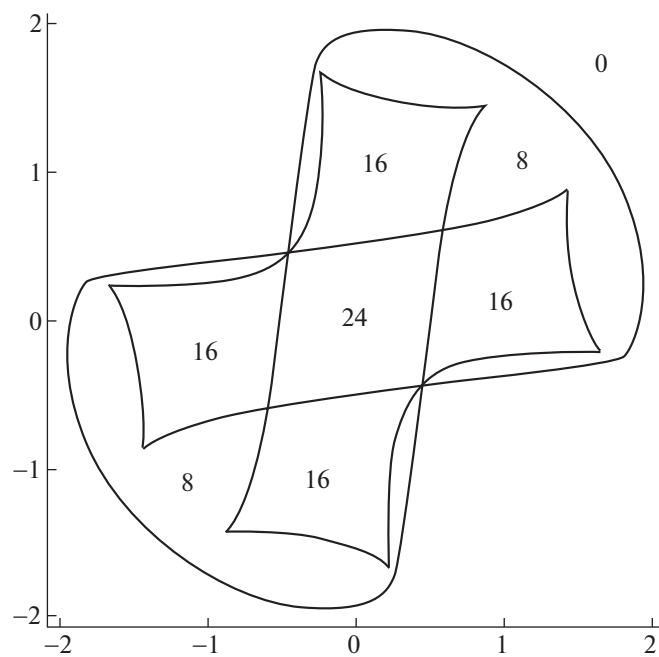
$P_1(a, b, c) = 0$, при пересечении которых не происходит смены числа действительных корней уравнения (2.4).

При значении $a = -2/3$ (рис. 4) две области, где равновесий не существует, стягиваются в точки при $b = c = \pm 2/3$. При бифуркационном значении $a = -1/2$ (рис. 5) две области с числом равновесий, равным 24, сливаются в одну большую центральную область, пример которой изображен на рис. 6 для значения $a = -0.495$, количество областей с числом равновесий, равным 16,

Рис. 4. Области для $a = -2/3$ Рис. 5. Области для $a = -1/2$

при этом равно шести. Далее, при значении $a = (2 - \sqrt{22})/6 \approx -0.448$ количество областей с числом равновесий, равным 16, уменьшается с шести до четырех (рис. 7).

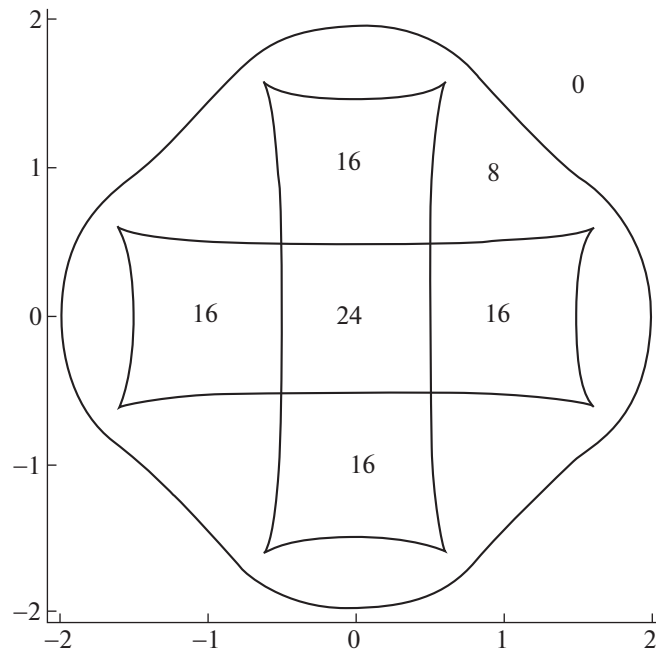
При $a = 0$ (рис. 8) количество областей с числом равновесий, равным 8, уменьшается с двух до одной, количество областей с числом равновесий, равным 16, равно четырем, и в итоге мы имеем одну симметричную область в центре рисунка в форме квадрата с числом равновесий, равным 24, и одну область, где равновесий не существует. Для положительных значений параметра

Рис. 6. Области для $a = -0.495$ Рис. 7. Области для $a = (2 - \sqrt{22})/6$

a рисунки, аналогичные рис. 1–8, получаются путем их зеркального отражения относительно оси b на $-b$ либо оси c на $-c$.

Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов, так же как в случае учета непотенциальной компоненты аэродинамического момента [7], приводит к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0 \quad (4.3)$$

Рис. 8. Области для $a = 0$

с $a_1 = 0$. Если при этом $a_3 \neq 0$ и (или) $a_5 \neq 0$, то исследуемое положение равновесия неустойчиво. Добившись выполнения условий $a_3 = a_5 = 0$, можно надеяться на выполнение необходимых условий устойчивости. Такое исследование было проведено в [17]. Введение достаточного по величине диссипативного момента позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия спутника.

Заключение. В настоящей работе проведено исследование вращательного движения спутника относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и постоянного моментов. Главное внимание уделено исследованию положений равновесия спутника. Предложен новый алгебраический метод (основанный на построении базиса Гребнера) определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора постоянного момента в общем случае, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, получены условия их существования. Проведена классификация двумерных сечений областей с равным числом положений равновесия с использованием алгебраических методов построения дискриминантных гиперповерхностей и выполнен детальный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесия в плоскости параметров b и c при бифуркационных значениях параметра a . Показано существование областей с 24, 16, 8 и 0 равновесных ориентаций спутника на круговой орбите при различных параметрах задачи.

Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования гравитационных систем управления ориентацией спутника и позволят провести моделирование влияния возмущающего постоянного момента на его ориентацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. 1959. Вып. 3. С. 13–31.
2. Sarychev V.A. Asymptotically Stable Stationary Rotational Motions of a Satellite // Proc. 1st IFAC Symp. on Automatic Control in Space. N.Y. Plenum Press, 1966. P. 277–286.
3. Likins P.W., Roberson R.E. Uniqueness of Equilibrium Attitudes for Earth-Pointing Satellites // J. Astronaut Sci. 1966. V. 13. № 2. P. 87–88.
4. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. “Исследование космического пространства”. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
5. Nurre G.S. Effects of Aerodynamic Torque on an Asymmetric Gravity-Stabilized Satellite // J. Spacecraft and Rockets. 1968. V. 5. № 9. P. 1046–1050.

6. *Frik M.A.* Attitude Stability of Satellite Subjected to Gravity Gradient and Aerodynamic Torques // *AIAA J.* 1970. V. 8. № 10. P. 1780–1785.
7. *Сазонов В.В.* Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // *Космич. исслед.* 1989. Т. 27. № 6. С. 836–848.
8. *Garber T.B.* Influence of Constant Disturbing Torques on the Motion of Gravity Gradient Stabilized Satellites // *AIAA J.* 1963. V. 1. № 4. P. 968–969.
9. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* Равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // *Космич. исслед.* 1994. Т. 32. № 4–5. С. 43–50.
10. *Sarychev V.A., Paglione P., Guerman A.* Influence of Constant Torque on Equilibria of a Satellite in a Circular Orbit // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2003. V. 87. № 3. P. 219–239.
11. *Gutnik S.A., Guerman A., Sarychev V.A.* Application of Computer Algebra Methods to Investigation of Influence of Constant Torque on Stationary Motions of Satellite // *Lecture Notes in Computer Science (LNCS) / Eds V.P. Gerdt, W. Koepf, W.M. Seiler, E.V. Vorozhtsov.* CASC 2015. Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. V. 9301. P. 198–209.
12. *Gutnik S.A.* Application of Computer Algebra to Investigation of the Relative Equilibria of a Satellite // *Proc. Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation.* ACM ISSAC'93. ACM Press, 1993. P. 63–64.
13. *Бухбергер Б.* Базисы Гребнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов // *Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления.* М.: Мир, 1986. С. 331–372.
14. *Гутник С.А., Сантуш Л., Сарычев В.А., SILVA A.* Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента. Положения равновесия и их устойчивость // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2015. № 3. С. 142–155.
15. Maple online help: <http://www.maplesoft.com/support/help/>
16. *Мейман Н.Н.* Некоторые вопросы расположения корней полиномов // *Успехи мат. наук.* 1949. Т. 4. № 6. С. 154–188.
17. *Sarychev V.A., Paglione P., Guerman A.D.* Stability of Equilibria for a Satellite Subject to Gravitational and Constant Torques // *J. Guidance Control and Dynamics.* 2008. V. 31. № 2. P. 386–394.