ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 472, № 6, с. 639–641

МАТЕМАТИКА

УДК 517

ОБ УСЛОВИИ СХОДИМОСТИ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО МЕТОДА ШВАРЦА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2017 г. Э. Г. Шифрин

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 12.09.2016 г.
Поступило 14.09.2016 г.

Альтернирующий метод Шварца позволяет построить решение задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа в объединении конечного числа областей с непустыми пересечениями, если эта задача имеет решение в каждой области. При доказательстве сходимости метода и оценке ее скорости использовалось условие различия нормалей к границам областей в точках их пересечения. В сообщении доказывается, что это ограничение может быть снято для областей с нормалями, непрерывными по Гёльдеру. Отмена ограничения не изменяет скорость сходимости.

DOI: 10.7868/S0869565217060068

1. Пусть $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)} \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega^{(1)} \bigcap \Omega^{(2)} = B \neq \phi$ – ограниченные жордановы двумерные области с кусочно-гладкими границами. В $\Omega^{(1,2)}$ существуют решения $U^{(1,2)}(z)$, $z = x = iy$, задачи Дирихле для уравнения Лапласа, получаемые конформными отображениями из интеграла Пуассона. Альтернирующий метод Шварца [1] позволяет найти гармоническую функцию $U(z)$ в объединении областей $A = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$, принимающую на границе ∂A значения непрерывной функции $f(z)$. Без ограничения общности можно считать, что $f(z) \geq 0$ и что границы областей $\partial\Omega^{(1,2)}$ пересекаются в двух точках $Z_{1,2}$, которые разбивают $\partial\Omega^{(1,2)}$ на интервалы $\alpha^{(1)},\beta^{(1)}$ и $\alpha^{(2)},\beta^{(2)}$ таким образом, что

$$\partial\Omega^{(i)} = \overline{\alpha^{(i)}} \cup \overline{\beta^{(i)}}, \quad i = 1, 2;$$
$$\overline{\beta^{(1)}} \cup \overline{\beta^{(2)}} = \partial B, \quad \overline{\alpha^{(1)}} \cup \overline{\alpha^{(2)}} = \partial A.$$

Метод Шварца состоит в поочередных решениях задач Дирихле для гармонических функций $U_n^{(1,2)}(z)$ в областях $\Omega^{(1,2)}$ с граничными условиями $U_n^{(1)}(z)|_{\partial\Omega^{(1)}} = u_n^{(1)}(z)$, $U_n^{(2)}(z)|_{\partial\Omega^{(2)}} = u_n^{(2)}(z)$, задаваемыми в процессе итераций следующим образом.

Сначала задается граничное условие задачи Дирихле в области $\Omega^{(1)}$:

$$u_1^{(1)}(z)|_{\partial\Omega_1} = \begin{cases} f(z), & z \in \overline{\alpha^{(1)}}, \\ g(z), & z \in \overline{\beta^{(1)}}, \end{cases}$$

в виде неотрицательной функции $g(z) \in C(\overline{\beta^{(1)}})$, полученной непрерывным продолжением функции $f(z)$ на отрезок $\overline{\beta^{(1)}} \subset \partial\Omega^{(1)}$. Это позволяет найти в $\Omega^{(1)}$ решение задачи Дирихле $U_1^{(1)}(z) \in C(\overline{\Omega^{(1)}}) \bigcap C^2(\Omega^{(1)})$ и вычислить $U_1^{(1)}(z)|_{\overline{\beta^{(2)}}} \in C(\overline{\beta^{(2)}})$. Затем в $\Omega^{(2)}$ определяется гармоническая функция $U_1^{(2)}(z) \in C(\overline{\Omega^{(2)}}) \bigcap C^2(\Omega^{(2)})$, принимающая на $\partial\Omega^{(2)}$ значения непрерывной функции:

$$u_1^{(2)}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \overline{\alpha^{(2)}}, \\ U_1^{(1)}(z), & z \in \overline{\beta^{(2)}}, \end{cases}$$

и далее – гармонические функции $U_{n+1}^{(1)}(z)$, $U_{n+1}^{(2)}(z), n = 1, 2, \ldots$, в областях $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, соответственно, принимающие на границах значения непрерывных функций

$$u_{n+1}^{(1)}(z)|_{\partial\Omega_1} = \begin{cases} f(z), & z \in \overline{\alpha^{(1)}}, \\ U_n^{(2)}(z), & z \in \overline{\beta^{(1)}}, \end{cases}$$

$$u_{n+1}^{(2)}(z)|_{\partial\Omega_2} = \begin{cases} f(z), & z \in \overline{\alpha^{(2)}}, \\ U_{n+1}^{(1)}(z), & z \in \overline{\beta^{(2)}}. \end{cases}$$

Из принципа максимума для гармонических функций следует, что $\{U_n^{(1,2)}(z)\colon n = 1, 2, \ldots\}$ – ограниченные, неубывающие последовательности.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.
E-mail: ernest-shifrin@yandex.ru

Равномерная сходимость этих последовательностей к решениям задач Дирихле $U^{(1,2)}(z)$ в областях $\overline{\Omega^{(1,2)}}$, а затем – последовательности $U_n(z) = \begin{cases} U_n^{(1)}(z), z \in \Omega^{(1)}, \\ U_n^{(2)}(z), z \in \Omega^{(2)}, \end{cases}$ – к решению задачи Дирихле $U(z) = \begin{cases} U^{(1)}(z), z \in \Omega^{(1)}, \\ U^{(2)}(z), z \in \Omega^{(2)}, \end{cases}$ в области $\overline{A}$ доказывается (см. [2]) с помощью леммы Шварца, содержащей условие различия касательных к $\partial\Omega^{(1,2)}$ в точках $Z_{1,2}$ (относительно которых предполагается, что они не являются угловыми точками кривых $\partial\Omega^{(1,2)}$).

2. В главе "Метод Шварца" [3], которую А.Н. Крылов посвятил распространению метода на широкий класс уравнений и краевых задач, предложено доказательство сходимости последовательности $\{U_n(z)\colon n \to \infty\}$ к решению задачи Дирихле $U(z)$ в области A, использующее лишь свойства ограниченности и монотонного возрастания. (Лемма Шварца использовалась в [3] только для оценки скорости сходимости.)

Указанные условия обеспечивают сходимость гармонических функций $U_n(z)$ в каждой точке области A, поэтому гармоничность $U(z)$ в A следует из теоремы Харнака. Однако необходимая для выполнения граничного условия $U(z)|_{\partial A} = f(z) \in C(\partial A)$ равностепенная непрерывность множества $u_n^{(1,2)}(z)|_{z\in\partial A}$ в [3] не доказана. (Ограниченная последовательность гармонических функций компактна лишь в любой замкнутой внутренней подобласти области A [2].)

3. С. Стоилов применил в [4] метод Шварца к задаче Дирихле в "обобщенной" постановке, допускающей невыполнение граничного условия в конечном числе точек. При доказательстве сходимости (без использования леммы Шварца) использовались ограниченные в $\Omega^{(1,2)}$ решения задач Дирихле $\omega(z) = \begin{cases} 0, \ z \in \alpha^{(1,2)}, \\ 1, \ z \in \beta^{(1,2)}. \end{cases}$ В [4] доказано, что граничное условие $U(z)|_{\partial A} = f(z) \in C(\partial A)$ выполняется в точках, отличных от $Z_{1,2}$, т.е. метод Шварца позволяет построить "обобщенное" решение задачи Дирихле.

Однако "обобщенная" постановка [4] не является расширением классической. Действительно, расширением, в котором граничное условие выполняется почти всюду на ∂A, является постановка, в которой решение принадлежит пространству Соболева $W_2^1(A)$. В ней условием разрешимости является существование продолжения $f(z)|_{\partial A}$ в $W_2^1(A)$, но непрерывные функции, в отличие от непрерывно дифференцируемых, в общем случае не имеют такого продолжения [5].

4. Выполнение граничного условия во всех точках ∂A обеспечивается, без использования леммы Шварца, условием $\partial\Omega^{(1,2)} \in C^{1+\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$.

Т е о р е м а. *Если нормали к границам областей $\Omega^{(1,2)}$ удовлетворяют условию Гёльдера, то условие несовпадения нормалей в точках $Z_{1,2}$ в доказательстве* [2] *сходимости метода Шварца может быть снято.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть нормали к $\partial\Omega^{(1,2)}$ в точках $Z_{1,2}$ совпадают. Используя, в силу условия теорему Келлога (см. [6]), будем считать, что $\Omega^{(1,2)}$ – конформные отображения единичного круга $D = \{z = re^{i\theta}, r \in [0,1), \theta \in [0,2\pi]\}$ однолистными аналитическими функциями $z = z^{(1,2)}(\omega) \in C^{1+\lambda}(\overline{D})$, $\lambda \in (0,1]$. (Длины дуг кривых $\partial\Omega^{(1,2)}$ удовлетворяют условиям $s_{1,2}(\theta) \in C^{1+\lambda}(\overline{0,2\pi})$.)

Положив $f(z) = C^{1+\mu}(\partial A), \mu \in (0,1]$, $g(z) \in C^{1+\mu}(\overline{\beta^{(1)}})$, применим сначала метод Шварца к более узкому классу решений $U^{(1,2)}(z) \in C^{1+\mu}(\overline{\Omega^{(1,2)}}) \cap C^2(\Omega^{(1,2)})$. В силу касания кривых $\partial\Omega^{(1,2)}(z)|_{Z_{1,2}}$, $\left.\frac{\partial g(z)}{\partial z}\right|_{z=Z_{1,2}} = \left.\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|_{z=Z_{1,2}}$.

Пусть $U_n^{(1,2)}(z^{(1,2)}(\omega)) = U_n^{(1,2)}(\omega) = \mathrm{Re}(\Phi_n^{(1,2)}(\omega))$, где аналитические функции $\Phi_n^{(1,2)}(\omega), n = 1, 2, \ldots$, представлены интегралом Шварца с точностью до мнимого слагаемого

$$\Phi_n^{(1,2)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n^{(1,2)}(s^{(1,2)}(\theta))\frac{e^{i\theta}+\omega}{e^{i\varphi}-\omega}d\theta.$$

По построению, последовательности $\{u_n^{(1,2)}(s^{(1,2)})\colon n = 1, 2, \ldots\}$ ограничены в $C^{1+\mu}(\partial\Omega^{(1,2)})$, поэтому $u_n^{(1,2)}(\theta) = u_n^{(1,2)}(s^{(1,2)}(\theta)) \in C^{1+\mu}(\partial D)$.

Интеграл Шварца выражается через интеграл типа Коши. Это позволяет использовать следующие свойства [7]:

1)

$$\frac{d\Phi_n^{(1,2)}(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du_n^{(1,2)}(\theta)}{d\theta}\frac{e^{i\theta}+\omega}{e^{i\varphi}-\omega}d\theta;$$

2)

$$\frac{du_n^{(1,2)}(\theta)}{d\theta} \in C^{\mu}(\partial D) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ \lim_{\omega \to \partial D} \frac{d\Phi_n^{(1,2)}(\omega)}{d\omega}, \frac{d\Phi_n^{(1,2)}(\theta)}{d\theta} \right\} \in C^{\mu_1}(\partial D):$$
$$0 < \mu < 1 \Rightarrow \mu_1 = \mu, \quad \mu = 1 \Rightarrow \mu_1 < 1;$$

3) операции дифференцирования и перехода к пределу в интеграле типа Коши коммутативны.

Эти свойства позволяют установить равномерную ограниченность модулей аналитических функций $\frac{d\Phi_n^{(1,2)}(\omega)}{d\omega}$ в $\overline{D}$. Поэтому последовательности гармонических функций $\{\mathrm{Re}\,\Phi_n^{(1,2)}(\omega): n = 1, 2, \ldots\}$ компактны в $C(\overline{\Omega^{(1,2)}})$. Это позволяет извлечь равномерно сходящиеся в $\overline{D}$ подпоследовательности $\{\mathrm{Re}\,\Phi_n^{(1,2)}(\omega): n = 1, 2, \ldots\}$.

Сужения пределов этих подпоследовательностей на $\overline{\alpha^{(1)}} \cup \overline{\alpha^{(2)}} = \partial A$ определяют граничные значения задачи Дирихле для гармонических функций в области A. Их решения совпадают с предельными гармоническими функциями $U^{(1,2)}(z)$, аналитически продолжающими друг друга. В силу теоремы единственности, в A существует предельная гармоническая функция $U(z) \in C^{1+\mu}(\overline{A})$, удовлетворяющая условию $U(z)|_{\partial A} = f(z) \in C^{1+\mu}(\partial A)$.

По теореме Вейерштрасса, множество тригонометрических полиномов всюду плотно в $C^k(\partial D)$, $k \geq 0$, поэтому множество функций $f(z)|_{\partial A} \in C^{1+\mu}(\partial A)$ всюду плотно в $C(\partial A)$. В силу непрерывной зависимости классического решения задачи Дирихле от граничного условия, решения задачи Дирихле с граничными условиями $f(z)|_{\partial A} \in C^{1+\mu}(\partial A)$ всюду плотны в множестве решений задачи Дирихле с непрерывными граничными условиями.

5. Приведенное доказательство устанавливает лишь факт сходимости последовательных приближений, построенных по Шварцу. Покажем, что повышенная гладкость границ $\partial\Omega^{(1,2)} \in C^{1+\lambda}, \lambda \in (0,1]$, позволяет сохранить оценку скорости сходимости по закону геометрической прогрессии [2].

Обозначим

$$M_n^{(1)} = \left\| U_{n+1}^{(1)} - U_n^{(1)} \right\|_{C(\overline{\beta^{(2)}})} = \left\| u_{n+1}^{(2)} - u_n^{(2)} \right\|_{C(\overline{\beta^{(2)}})},$$
$$M_n^{(2)} = \left\| u_{n+1}^{(1)} - u_n^{(1)} \right\|_{C(\overline{\beta^{(1)}})} = \left\| U_n^{(2)} - U_{n-1}^{(2)} \right\|_{C(\overline{\beta^{(1)}})}.$$

В доказательстве сходимости [2] для получения соотношений $M_n^{(1)} \leq qM_n^{(2)}$, $M_n^{(2)} \leq qM_{n-1}^{(1)}$, $q < 1$, использовалась лемма Шварца с условием различия нормалей в точках $Z_{1,2}$. Покажем, что при невыполнении этого условия существование постоянной $q < 1$, а следовательно, справедливость формулы $M_n^{(1)} \leq q^2 M_{n-1}^{(1)}, q < 1$, обусловлена фактом существования непрерывного решения задачи Дирихле $U(z)$ в $\overline{A}$.

Л е м м а. *Пусть неотрицательная функция* $\varphi(z)$, *гармоническая в* A *и непрерывная в* $\overline{A}$, *обращается в нуль на* $\overline{\alpha^{(1)}}$ *и удовлетворяет неравенству* $0 \leq \varphi(z)|_{\partial A} \leq 1$, *так что существует точка* $z \in \alpha^{(2)}$, *в которой* $\varphi(z) = 1$.

Тогда существует постоянная $0 < q < 1$, *зависящая только от формы областей* $\Omega^{(1,2)}$ *и от* $g(z)$, *такая что* $\varphi(z)|_{\beta^{(2)}} \leq q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия, $\varphi(Z_{1,2}) = 0$. Поэтому $\max_{z \in \beta^{(2)}} \varphi(z)$ достигается внутри отрезка β_2. В силу принципа максимума,

$$q = \max_{z \in \beta^{(2)}} \varphi(z) < \max_{z \in \Omega^{(1)}} \varphi(z) = 1.$$

Как и в доказательстве [2], формулы $M_n^{(1)} \leq \leq q^2 M_{n-1}^{(1)}, q = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max(q_n^{(1)}, q_n^{(2)}) < 1$ следуют из леммы, если в качестве $\varphi(z)$ в области $\Omega^{(1)}$ взять

$$\varphi_n^{(1)}(z) = \frac{(U_{n+1}^{(1)} - U_n^{(1)})}{M_n^{(2)}},$$

а в области $\Omega^{(2)}$

$$\varphi_n^{(2)}(z) = \frac{(U_n^{(2)} - U_{n-1}^{(2)})}{M_n^{(1)}},$$

где $M_n^{(1)} \leq qM_n^{(2)}$.

Полученная оценка позволяет использовать численные методы, вычисляющие решения задач Дирихле $U_n^{(1,2)}(z)$ с равномерно ограниченной погрешностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwarz H.A.* // Uber einige Abbildungsaufgaben, Ges.Math. Abh. II. 1869. P. 65–83.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. Т. 2.
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Наука, 1962.
4. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 2.
5. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
6. *Соломенцев Е.Д.* Келлога теорема. В кн.: Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979. Т. 2.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1963.