Игорю Борисовичу
с глубоким уважением
от авторов
Рог

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 476, № 4, с. 381–386

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

БИКОМПАКТНАЯ СХЕМА ШЕСТОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ СО СВОЙСТВОМ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2017 г. А. В. Чикиткин[1], Б. В. Рогов[1,2,*]

Представлено академиком РАН А.С. Холодовым 10.03.2017 г.

Поступило 14.03.2017 г.

Для численного решения нестационарных квазилинейных уравнений гиперболического типа построено семейство полудискретных симметричных бикомпактных схем на основе коллокационных полиномов как в одномерном, так и в многомерном случаях. Выполнен дисперсионный анализ полудискретной бикомпактной схемы шестого порядка пространственной аппроксимации. Доказано, что дисперсионные свойства бикомпактной схемы сохраняются на существенно неравномерных пространственных сетках. Показано, что фазовая ошибка бикомпактной схемы шестого порядка не превосходит 0,2% во всём диапазоне значений безразмерного волнового числа. На численном примере продемонстрирована возможность бикомпактной схемы адекватно моделировать распространение волн на грубой разностной сетке в течение длительного времени.

DOI: 10.7868/S0869565217280040

1. Проблема. Для численного моделирования переноса акустических, электромагнитных и упругих волн на большие расстояния и в течение длительного времени необходимы схемы, обладающие малыми диссипацией и дисперсией. В качестве схем с такими свойствами широко используются симметричные компактные схемы, которые имеют лучшее спектральное разрешение по сравнению с классическими симметричными разностными схемами того же порядка точности [1–3]. В недавней работе [4] предложено семейство полудискретных симметричных компактных схем, обладающих хорошим спектральным разрешением, для численного решения таких многомасштабных задач, как задачи вычислительной аэроакустики и прямого численного моделирования турбулентности. Схемы шестого и восьмого порядка точности из данного семейства авторы [4] назвали оптимальными с точки зрения соотношения между точностью и трудоёмкостью схем. Однако эти схемы можно использовать в расчётах лишь на равномерных или слабо неравномерных сетках [1, 5], поскольку шаблон схем по каждому пространственному направлению содержит не менее трёх целых узлов.

Для численного решения уравнений гиперболического типа в работе [6] была предложена полудискретная бикомпактная схема четвёртого порядка пространственной аппроксимации, построенная методом прямых на пространственном шаблоне, который расположен в пределах одной ячейки разностной сетки и состоит из двух целых и одного полуцелого узла. Для такой схемы её порядок аппроксимации и дисперсионные свойства сохраняются при переходе от равномерной к существенно неравномерной сетке. Однако четвёртый порядок пространственной аппроксимации может оказаться недостаточным для численного решения многомасштабных задач, где требуются схемы со спектральным разрешением повышенной точности.

В настоящей работе на основе коллокационных полиномов построено семейство полудискретных симметричных бикомпактных схем, которое содержит схему [6], для численного решения квазилинейного уравнения переноса. Проведён дисперсионный анализ схемы шестого порядка пространственной аппроксимации из этого семейства. Показано, что отклонение численной фазовой скорости от точной фазовой скорости не превосходит 0,2% для всех безразмерных волновых чисел.

[1]*Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.*

[2]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва*

**E-mail: rogov.boris@gmail.com*

2. Бикомпактные схемы как компактные схемы коллокационного типа. На примере скалярного квазилинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0,\quad \frac{df(u)}{du}>0 \tag{1}$$

покажем, что полудискретные бикомпактные схемы и, в частности, схема четвёртого порядка аппроксимации по пространственной переменной [6] могут быть построены с помощью коллокационных полиномов. Для этого рассмотрим сначала обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$u_x=\psi(x,u), \tag{2}$$

где нижний индекс x обозначает дифференцирование по x. На оси x введём неравномерную сетку из целых узлов x_j с шагами $h_{x,j+1/2}=x_{j+1}-x_j$. Поскольку дальнейшие выкладки будут связаны только с одной пространственной ячейкой $[x_j,x_{j+1}]$, второй индекс у шага $h_{x,j+1/2}$ опустим. Пусть заданы узловые коэффициенты (далее ради краткости – узлы) коллокации – вещественные числа $c_\alpha\in[0,1]$, $\alpha=1,2,\ldots,s$, где $s\geq 3$ – натуральное число. Будем считать, что узлы коллокации симметричны относительно середины отрезка [0, 1] и $c_1=0, c_s=1$. Приближённое решение уравнения (2) с начальным условием $u(x_j)=u_j$ на отрезке $[x_j,\ x_j+h_x]$ будем искать в виде коллокационного полинома $p_s(x)$ степени s, удовлетворяющего следующим условиям:

$$p_s'(x_j+c_\alpha h_x)=\psi(x_j+c_\alpha h_x,\ p_s(x_j+c_\alpha h_x)),$$
$$\alpha=1,2,\ldots,s,\quad p_s(x_j)=u_j,$$

где $p_s'(x)=\dfrac{dp_s}{dx}$. Введём следующие обозначения:

$$u_{j_\alpha}=p_s(x_{j_\alpha}),\quad \psi_{j_\alpha}=\psi(x_{j_\alpha},u_{j_\alpha}),$$
$$x_{j_\alpha}=x_j+c_\alpha h_x,\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ s, \tag{3}$$

где нижний индекс $j_\alpha\equiv j+c_\alpha$. Производная полинома $p_s(x)$ однозначно может быть выражена с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$p_s'(x_j+\xi h_x)=\sum_{\beta=1}^{s}\psi_{j_\beta}l_\beta(\xi),$$
$$l_\beta(\xi)=\prod_{\substack{\alpha=1,\ldots,s\\ \alpha\neq\beta}}\frac{\xi-c_\alpha}{c_\beta-c_\alpha},\quad \xi\in[0,\ 1]. \tag{4}$$

Интегрируя левое равенство в (4) по ξ на отрезках $[c_\alpha,\ c_{\alpha+1}]$ $(\alpha=1,\ 2,\ldots,s-1)$ и учитывая обозначения (3), получим $s-1$ линейно независимых связей между u_{j_α} и ψ_{j_α}

$$u_{j_{\alpha+1}}-u_{j_\alpha}=h_x\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\psi_{j_\beta},\ \alpha=1,2,\ \ldots,\ s-1, \tag{5}$$

где

$$a_{\alpha\beta}=\int_{c_\alpha}^{c_{\alpha+1}}l_\beta(\xi)\,d\xi,\ \alpha=1,2,\ \ldots,s-1,\quad \beta=1,2,\ \ldots,\ s. \tag{6}$$

Система уравнений (5) является одношаговой коллокационной разностной схемой для интегрирования ОДУ (2), которая эквивалентна некоторому неявному методу Рунге–Кутты (РК) [7]. Шаблон этой схемы состоит из двух целых узлов и $s-2$ дробных узлов. Эффективный разностный порядок системы разностных уравнений, определяемый как разность общего числа узлов шаблона и общего числа уравнений, равен единице.

Коллокационная разностная схема, подобная схеме (5) для уравнения (2), для ОДУ

$$f(u)_x=\psi(x,\ u) \tag{7}$$

имеет вид

$$f_{j_{\alpha+1}}-f_{j_\alpha}=h_x\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\psi_{j_\beta},\ f_{j_\alpha}=f(u_{j_\alpha}),$$
$$\alpha=1,2,\ldots,s-1. \tag{8}$$

Чтобы получить полудискретную (разностную по x и непрерывную по t) схему для уравнения переноса (1), в правой части уравнения (8) положим $\psi=-\dfrac{\partial u}{\partial t}$. В результате получим систему эволюционных ОДУ

$$h_x\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j_\beta}+f_{j_{\alpha+1}}-f_{j_\alpha}=0,\ \alpha=1,2,\ \ldots,\ s-1, \tag{9}$$

которая является полудискретной разностной схемой для квазилинейного уравнения (1). Заметим, что, составляя независимые линейные комбинации уравнений (9), можно получить другие эквивалентные формы схемы.

В случае $s=3$ и $c_1=0,\ c_2=\dfrac{1}{2},\ c_3=1$ схема (9) состоит из двух уравнений со следующей матрицей коэффициентов $\mathbf{A}=\{a_{\alpha\beta}\}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{24} & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{24}\\ -\dfrac{1}{24} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{5}{24}\end{bmatrix}.$$

Если сложить эти уравнения и вычесть одно из другого, то в результате получим эквивалентную схему, которая совпадает с полудискретной бикомпактной схемой [6], имеющей четвёртый порядок аппроксимации по x.

В случае $s = 5$ и равномерно расположенных узлов коллокации $\left(c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{4},\ c_3 = \frac{1}{2},\ c_4 = \frac{3}{4},\ c_5 = 1\right)$ схема (9) состоит из четырёх уравнений со следующей матрицей коэффициентов

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2880}\begin{vmatrix} 251 & 646 & -264 & 106 & -19 \\ -19 & 346 & 456 & -74 & 11 \\ 11 & -74 & 456 & 346 & -19 \\ -19 & 106 & -264 & 646 & 251 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Из способа построения схемы (9), (10) с помощью коллокационного полинома следует, что её порядок аппроксимации равен шести. В последнем пункте сообщения это будет подтверждено численным расчётом.

Несложно построить многомерные бикомпактные схемы на основе коллокационных полиномов. Для простоты покажем это в двумерном случае. Сначала рассмотрим стационарное квазилинейное уравнение переноса

$$f(u)_x + g(u)_y = \psi(x,y,u). \tag{11}$$

Полудискретную схему (8) для уравнения (7) перепишем в виде

$$\sum_{\beta=1}^{s} b_{\alpha\beta} f_{j_\beta} = h_x \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} \psi_{j_\beta},\ \alpha = 1, 2, \ldots, s-1, \tag{12}$$

где элементы матрицы $\mathbf{B} = \left\{b_{\alpha\beta}\right\}$ даются формулами

$$b_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1, & \beta = \alpha, \\ 1, & \beta = \alpha + 1,\ \alpha = 1, 2, \ldots, s-1,\ \beta = 1, 2, \ldots, s, \\ 0, & \beta \neq \alpha,\ \alpha + 1. \end{cases} \tag{13}$$

Для уравнения

$$g(u)_y = \psi(x,u) \tag{14}$$

имеем аналогичную (12) разностную схему

$$\sum_{\beta=1}^{s} b_{\alpha\beta} g_{k_\beta} = h_y \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} \psi_{k_\beta},\ \alpha = 1, 2, \ldots, s-1, \tag{15}$$

где нижний индекс $k_\alpha \equiv k + c_\alpha$, а индексом k занумерованы целые узлы разностной сетки на оси y. Если последовательно применить к уравнению (11) процедуру дискретизации по переменной x, такую же, как при получении схемы (12) для уравнения (7), а затем аналогичную процедуру по переменной y, такую же, как при получении схемы (15) для уравнения (14), то в результате получим уравнения двумерной бикомпактной схемы

$$h_y \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha'\beta} b_{\beta'\alpha} f_{j_\alpha k_\beta} + h_x \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} b_{\alpha'\beta} g_{j_\alpha k_\beta} =$$

$$= h_x h_y \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} a_{\alpha'\beta} \psi_{j_\alpha k_\beta},\ \alpha', \beta' = 1, 2, \ldots, s-1 \tag{16}$$

где

$$f_{j_\alpha k_\beta} = f(u_{j_\alpha k_\beta}),\ g_{j_\alpha k_\beta} = g(u_{j_\alpha k_\beta}),$$

$$\psi_{j_\alpha k_\beta} = \psi(x_{j_\alpha}, y_{k_\beta}, u_{j_\alpha k_\beta}),\ y_{k_\beta} = y_k + c_\beta h_y,$$

а $u_{j_\alpha k_\beta}$ – значение сеточной функции в узле $(x,y) = (x_{j_\alpha}, y_{k_\beta})$. Чтобы получить бикомпактную схему для нестационарного однородного уравнения переноса

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \tag{17}$$

достаточно формально подставить в уравнения (16) $\psi(x,y,u) = -u_t$ и получить

$$h_x h_y \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} a_{\alpha'\beta} (u_t)_{j_\alpha k_\beta} + h_y \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha'\beta} b_{\beta'\alpha} f_{j_\alpha k_\beta} +$$

$$+ h_x \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} b_{\alpha'\beta} g_{j_\alpha k_\beta} = 0,\ \alpha', \beta' = 1, 2, \ldots, s-1. \tag{18}$$

Если для интегрирования системы ОДУ (18) использовать высокоточные многостадийные диагонально-неявные методы РК, то для экономичного решения системы разностных уравнений на каждой стадии этих методов можно использовать метод итерируемой приближённой факторизации [8, 9].

3. Дисперсионные свойства полудискретной бикомпактной схемы. Обычно для оценок дисперсии и диссипации, вносимых схемами, используется задача Коши для уравнения (1) с линейной функцией

$$f(u) = cu,\quad c = \text{const} > 0, \tag{19}$$

периодическими начальными данными $u(x,0) = \exp(ikx)$ и точным решением

$$u(x,t) = e^{ik(x-ct)}, \tag{20}$$

где i – мнимая единица, k – физическое волновое число, c – фазовая скорость.

Согласно формуле (9), бикомпактная схема из раздела 2 с пятью равноотстоящими узлами коллокации и функцией (19) имеет вид

$$h_x\sum_{\beta=1}^{5}a_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j_\beta}+c(u_{j_{\alpha+1}}-u_{j_\alpha})=0,\quad \alpha=1,2,3,4, \tag{21}$$

где коэффициенты матрицы $\mathbf{A}=\{a_{\alpha\beta}\}$ задаются формулой (10).

Будем искать основную полудискретную функцию $u_m(t)$ в (21), определённую в целых узлах, в виде бегущей волны

$$u_m(t)=e^{ik(x_m-c^*t)}=e^{ikx_m}e^{-ik^*ct},\ m=j,\ j+1, \tag{22}$$

где c^* – схемная (численная) фазовая скорость, $k^*=\dfrac{kc^*}{c}$ – эффективное (численное) волновое число, а вспомогательные полудискретные функции $u_{j_\alpha}(t)$, определённые в дробных узлах, в виде

$$u_{j_\alpha}(t)=\rho_{\alpha-1}e^{ikx_{j_\alpha}}e^{-ik^*ct},\ \rho_{\alpha-1}=\text{const},\ \alpha=2,3,4. \tag{23}$$

Подставляя функции (22), (23) в систему линейных ОДУ (21), получим систему четырёх алгебраических уравнений для определения четырёх неизвестных величин: ρ_1, ρ_2, ρ_3 и безразмерного эффективного волнового числа $\varphi^*=k^*h_x$. Поскольку ρ_1, ρ_2, ρ_3 входят в эти уравнения линейно, то их легко исключить и получить связь между φ^* и безразмерным волновым числом $\varphi=kh_x$. Нетрудно показать, что эта связь имеет следующий вид:

$$R(i\varphi^*)=e^{i\varphi}, \tag{24}$$

где функция

$$R(z)=\frac{3z^4+50z^3+420z^2+1920z+3840}{3z^4-50z^3+420z^2-1920z+3840} \tag{25}$$

является функцией устойчивости [7] схемы (5) с коэффициентами (10) для ОДУ (2) с линейной правой частью $\psi(x,u)=\lambda u$, $\lambda=\text{const}$, т.е. для линейного уравнения Далквиста [7]. В этом случае схема (5) имеет вид

$$u_{j_{\alpha+1}}-u_{j_\alpha}=z\sum_{\beta=1}^{5}a_{\alpha\beta}u_{j_\beta},\ z=\lambda h_x,\ \alpha=1,2,3,4.$$

Уравнение (24) с функцией (25) можно преобразовать к следующему виду:

$$3(\varphi^*)^4+50\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)(\varphi^*)^3-420(\varphi^*)^2-$$
$$-1920\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\varphi^*+3840=0. \tag{26}$$

Из уравнения (26) можно явно выразить φ через φ^*:

$$\varphi=2\operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi^*\left[1920-50(\varphi^*)^2\right]}{3\left[(\varphi^*)^4-140(\varphi^*)^2+1280\right]}\right). \tag{27}$$

График зависимости (27) для $\varphi\in[-\pi,\pi]$ показан на рис. 1 в виде пяти кривых. Эти кривые не пересекаются, причём только одна из них (кривая *1*) проходит через точку (0, 0) в плоскости (φ,φ^*) и соответствует физическому решению. Нетрудно показать, что величины ρ_1, ρ_2, ρ_3, найденные как функции φ, равны 1 с точностью до $O(\varphi^6)$ при малых значениях φ.

Фазовую ошибку схемы обычно характеризуют величиной $\left|\dfrac{\varphi^*}{\varphi}-1\right|=\left|\dfrac{c^*}{c}-1\right|$. На рис. 2 представлены графики зависимости $\left|\dfrac{\varphi^*}{\varphi}-1\right|$ от безразмерного волнового числа φ для полудискретной бикомпактной схемы шестого порядка точности

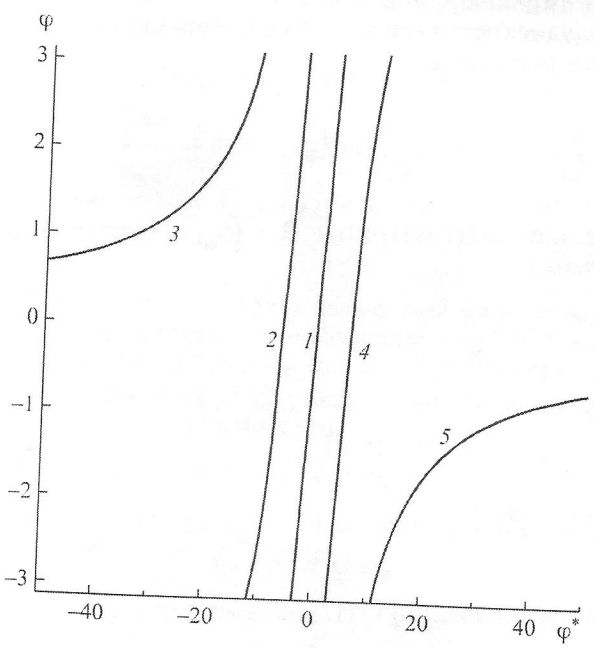

Рис. 1. Безразмерное точное волновое число как функция безразмерного эффективного волнового числа для полудискретной бикомпактной схемы.

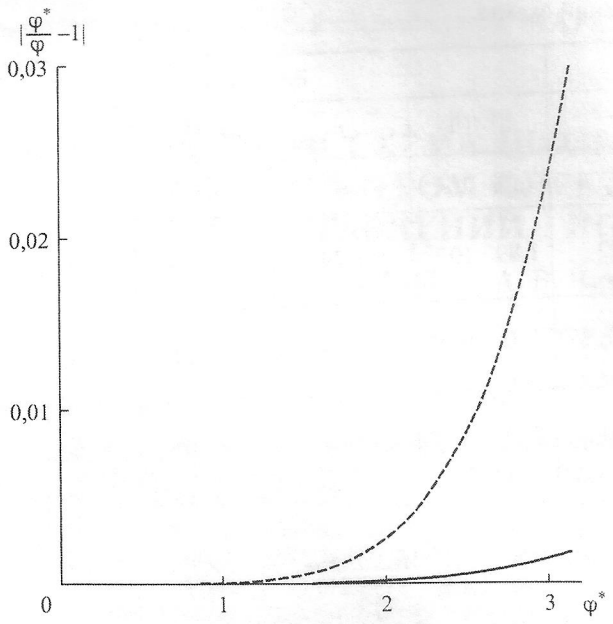

Рис. 2. Фазовая ошибка полудискретных компактных схем. Сплошная кривая показывает зависимость ошибки от безразмерного волнового числа для бикомпактной схемы шестого порядка точности, штриховая кривая – для компактной схемы CCS-T6 шестого порядка точности [4].

и полудискретной компактной схемы CCS-T6 [4] того же порядка, которая является наилучшей из найденных в литературе линейных схем для уравнения переноса с точки зрения малости фазовой ошибки $\left|\frac{\varphi^*}{\varphi}-1\right|$ для всех безразмерных волновых чисел $\varphi \in [0, \pi]$. Видно, что максимальная фазовая ошибка бикомпактной схемы в 15 раз меньше, чем аналогичная ошибка схемы CCS-T6 [4] при значении $\varphi = \pi$, которое соответствует самой короткой длине волны, разрешимой на сетке.

Отметим, что дисперсионный анализ полудискретной бикомпактной схемы был ограничен её исследованием в пределах одной разностной ячейки, поскольку шаблон схемы содержится в одной ячейке. Вследствие этого дисперсионные свойства бикомпактных схем сохраняются на существенно неравномерных сетках. Шаблон полудискретной компактной схемы CCS-T6 [4] состоит из трёх целых и трёх полуцелых узлов, т.е. расположен в пределах нескольких ячеек разностной сетки, поэтому спектральные свойства схемы CCS-T6, определённые на равномерной сетке, можно приближённо переносить только на случай слабо неравномерной сетки [1, 5]. В случае же существенно неравномерной сетки такой перенос неправомерен.

4. Результаты расчётов. Рассмотрим тестовую задачу [10] для уравнения переноса $u_t + u_x = 0$ с аналогичным начальным условием

$$u(x,0) = [2 + \cos(1{,}7x)]\exp\left[-2\ln 2\left(\frac{x}{10}\right)^2\right].$$

Расчёт ведётся от $t = 0$ до $t = 800$. Этот тест показывает возможности схемы моделировать перенос пакета коротких волн за длительное время.

Задача решается на отрезке $x \in [-50, 50]$ с периодическими граничными условиями. Для интегрирования по времени применяется однократно диагонально неявный метод Рунге–Кутты четвёртого порядка с пятью стадиями SDIRK54 [11]. Во всех расчётах число Куранта CFL = 0,1, было проверено, что ошибка дискретизации по времени значительно меньше ошибки дискретизации по пространству.

На рис. 3 маркерами-кружочками показаны результаты расчёта в момент времени $t = 800$ при шаге $h = 1$ по бикомпактной схеме шестого порядка, сплошная кривая показывает точное решение. Для большей наглядности точное и численное решения изображены на рисунке со сдвигом по x на 800 влево. Видно хорошее согласие решений.

В табл. 1 показаны значения численной ошибки Err в нормах L_1 и L_∞, а также локальные порядки сходимости p численного решения для разных значений шага h. Видно, что порядок сходимости решения близок к шести.

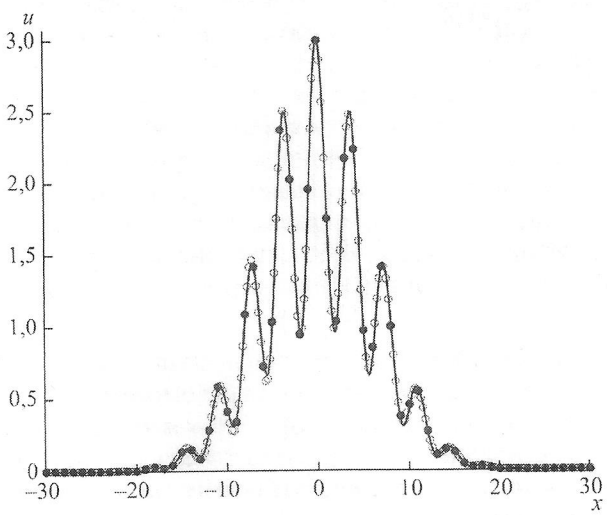

Рис. 3. Профили решений в задаче о переносе волнового пакета в момент времени $t = 800$. Сплошная линия – точное решение. Чёрные кружки показывают численное решение при шаге $h = 1$ в целых узлах, а светлые кружки – в дробных узлах.

Таблица 1. Ошибки и порядки сходимости бикомпактной схемы

h	Целые узлы				Все узлы			
	$\|\|\mathrm{Err}\|\|_1$	p	$\|\|\mathrm{Err}\|\|_\infty$	p	$\|\|\mathrm{Err}\|\|_1$	p	$\|\|\mathrm{Err}\|\|_\infty$	p
1	$1{,}03 \cdot 10^{-2}$		$1{,}04 \cdot 10^{-1}$		$1{,}04 \cdot 10^{-2}$		$1{,}04 \cdot 10^{-1}$	
$\frac{1}{2}$	$1{,}87 \cdot 10^{-4}$	5,79	$1{,}84 \cdot 10^{-3}$	5,82	$1{,}89 \cdot 10^{-4}$	5,79	$1{,}90 \cdot 10^{-3}$	5,78
$\frac{1}{4}$	$3{,}30 \cdot 10^{-6}$	5,82	$3{,}28 \cdot 10^{-5}$	5,80	$3{,}33 \cdot 10^{-6}$	5,82	$3{,}35 \cdot 10^{-5}$	5,82
$\frac{1}{8}$	$5{,}11 \cdot 10^{-8}$	6,01	$5{,}14 \cdot 10^{-7}$	6,00	$5{,}11 \cdot 10^{-8}$	6,02	$5{,}14 \cdot 10^{-7}$	6,02

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 16–31–00296 мол_а и 14–01–00775.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Colonius T., Lele S.K.* // Prog. Aerosp. Sci. 2004. V. 40. № 6. P. 345–416.
2. *Ekaterinaris J.A.* // Prog. Aerosp. Sci. 2005. V. 41. № 3/4. P. 192–300.
3. *Kurbatskii K.A., Mankbadi R.R.* // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2004. V. 18. № 6. P. 533–546.
4. *Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.* // J. Comput. Phys. 2013. V. 248. P. 235–256.
5. *Bogey C., Bailly C.* // J. Comput. Phys. 2004. V. 194. № 1. P. 194–214.
6. *Рогов Б.В., Михайловская М.Н.* // ДАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 172–177.
7. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
8. *Чикиткин А.В.* Бикомпактные схемы для многомерных гиперболических уравнений и их эффективная реализация. Дис. канд. физ.-мат. наук. Долгопрудный: МФТИ (ГУ), 2016.
9. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* // ДАН. 2017. Т. 473. № 3. С. 263–267.
10. *Tam C.K.W.* In: Fourth Computational Aeroacoustics Workshop on Benchmark Problems. 2004. NASA/CP-2004–212954.
11. *Скворцов Л.М.* // Мат. моделирование. 2002. Т. 14. № 2. С. 3–17.