

**Акционерное общество
«Военно-промышленная корпорация
«Научно-производственное объединение машиностроения»**



**Ракетные комплексы и ракетно-
космические системы.**

**Проектирование, экспериментальная
отработка, лётные испытания, эксплуатация**

**Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея
XLI Академических чтений по космонавтике**

Выпуск 5

Реутов

2017

2.5. Численное моделирование процессов в композиционных материалах

Заведующий кафедрой
МФТИ,
доктор физико-
математических наук
ПЕТРОВ
Игорь Борисович



Доцент МФТИ,
кандидат физико-
математических наук
ВАСЮКОВ
Алексей Викторович



Доцент МФТИ,
кандидат физико-
математических наук
БЕКЛЕМЫШЕВА
Катерина Алексеевна



Ассистент МФТИ,
кандидат физико-
математических наук
ЕРМАКОВ
Алексей Сергеевич



Ассистент МФТИ
КАЗАКОВ
Александр Олегович



Данная работа посвящена моделированию расслоения композитов при низкоскоростном ударе. Расслоение и нарушение контакта между наполнителем и матрицей существенно снижают остаточную прочность детали. Большую часть этих повреждений можно определить при помощи ультразвукового контроля, однако он требует длительного времени и не может быть проведен «в поле». Это повышает стоимость эксплуатации изделий с композитной обшивкой.

Современная теория разрушения композитов – это активно развивающаяся область науки, однако ни один из существующих критериев разрушения не дает достаточно надежных результатов для разработки инженерных критериев [1]. В работе [2] приведено сравнение нескольких критериев разрушения, наиболее часто применяемых в коммерческих пакетах, между собой и с экспериментом. Показано, что наилучшее соответствие эксперименту показывает критерий расслоения [3].

В работе используется гибридный сеточно-характеристический метод 1-2 порядка на нерегулярных тетраэдральных сетках [4, 5, 6]. Композит моделируется как однородная ортотропная среда [7]. Описан алгоритм расчета разрушающего контакта. Приведены результаты расчета ряда задач.

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, моделирование композита, разрушение композита, расслоение, анизотропные материалы.

Введение

Полимерные композиционные материалы широко применяются в различных отраслях промышленности. Такие материалы могут обладать существенными преимуществами в сравнении с традиционными конструкционными материалами: легкость, прочность (в том числе усталостная), возможность варьировать свойства материала подбором базовых материалов и технологии изготовления. Наиболее распространенные углепластиковые композиты обладают высокой прочностью при малом весе и позволяют существенно снизить общий вес конструкции. В авиации активно рассматривается возможность применения композиционных материалов для ответственных силовых конструкций крыла и фюзеляжа самолёта – в частности, в истребителях шестого поколения.

Массовое применение композитов в несущих конструкциях сопряжено с рядом проблем. В первую очередь, это высокая стоимость таких материалов и трудоемкость ремонта деталей из них. При этом сложность вызывает не только изготовление и замена поврежденной детали, но и оперативная неразрушающая диагностика повреждений. В случае высокоскоростных ударов непригодность детали к эксплуатации можно определить невооруженным глазом по наличию деформаций материала. Но при наземном обслуживании самолета с композитными деталями, особенно элементами обшивки, гораздо чаще происходят низкоскоростные удары (энергия удара меньше 200 Дж): удары трапами, погрузчиками, тягачами, падение инструментов при ремонте. В случае низкоскоростных соударений в композитах проявляются эффекты, не наблюдавшиеся в однородных материалах: после действия нагрузки, не повреждающей однородный материал, в композите могут появляться области разрушения. Разрушение может происходить как в объеме материала, так и на контактных границах между матрицей и наполнителем или между отдельными слоями композита. Это приводит к существенной потере общей прочности конструкции при отсутствии видимых повреждений, что затрудняет контроль целостности деталей при эксплуатации.

Математическое моделирование широко применяется в высокотехнологичной промышленности при работе с традиционными конструкционными материалами, но в случае композитов существующие методы и созданные на их основе программные пакеты не обладают достаточной надежностью для практического инженерного применения. Наиболее распространенные методы моделирования позволяют получать области разрушений композита при статической и квазистатической нагрузке [1], но их применение к динамическим задачам требует большого количества поправок и введения внутренних параметров модели, которые невозможно определить напрямую из эксперимента. Разработка методов математического моделирования поведения композиционных материалов под динамической нагрузкой является крайне актуальной темой.

В работе [8] приведен обзор работ, посвященных исследованию низкоскоростных ударов по конструкциям из композиционных материалов. Стоит отметить, что определение низкоскоростного удара является достаточно

расплывчатым, и разные авторы могут подразумевать различный диапазон энергий [9, 10, 11]. В данной работе низкоскоростным считается удар, который не приводит к «разлёту» материала – распаду монослоев и субпакетов на отдельные тела. В этом случае мы можем наблюдать полный спектр эффектов BVID (barely visible impact damage).

Динамическое воздействие при низкоскоростном соударении почти не вызывает деформаций, но приводит к распространению упругих волн в образце. В силу сложного внутреннего строения композиционного материала итоговые области максимальных нагрузок и, соответственно, разрушения в конструкции формируются в результате интерференции прямых волн, а также отражённых и преломлённых на внешних и внутренних контактных границах. Следовательно, для моделирования низкоскоростного удара по композиту необходимо использовать численный метод, позволяющий получить полную волновую картину с высоким временным и пространственным разрешением и учётом влияния контактных границ. В данной работе для моделирования применяется сеточно-характеристический численный метод [4]. Данный метод учитывает характеристические свойства исходной системы уравнений, благодаря чему позволяет моделировать распространение волн в твердом деформируемом теле, взаимодействие волновых фронтов с границами детали, а также получать полное решение нестационарных контактных задач, что обеспечивает учет влияния внутренних контактных границ между средами с различной реологией. Метод позволяет получить высокое временное и пространственное разрешение и рассчитать компоненты тензора напряжений и вектора скоростей деформации в любой точке рассматриваемой конструкции в любой момент времени.

Столкновение с одиночным ударником рассматривается в работах [2, 3]. При множественном ударе волновая картина обладает более сложной структурой, чем в случае одинарного соударения – интерференция волн может привести к появлению новых областей разрушения, изменению их формы или их исчезновению. Предсказать появление подобных эффектов без полного моделирования процесса, исходя только из данных по разрушению от столкновения с одиночными ударниками, крайне сложно. Моделирование всех волновых процессов в композите при множественном соударении может объяснить многие явления и предсказать их появление в реальных экспериментах.

В данной работе рассмотрено столкновение с различным количеством ударников (один, два и четыре). Форма ударника выбрана сферической, что соответствует различным постановкам начальной задачи (град, гравий, шариковая бомба). Количество ударников, их скорости и расположение в пространстве могут быть выбраны любыми, в зависимости от постановки реального эксперимента, в котором будет проводиться сравнение.

Рассмотрены различные режимы соударения: одновременный удар, удар с малой задержкой по времени и удар с большой задержкой по времени. Время задержки выбрано сравнимым с характерным временем волновых процессов – временем прохождения волновой сжатия толщины материала. В этом случае большую роль играет интерференция волн. При большой задержке по времени каждый следующий удар происходит, когда волны от предыдущего удара рассеиваются настолько, что не

оказывают существенного влияния на волновую картину. Фактически, каждый следующий удар наносится по предварительно разрушенной области.

Также рассмотрен случай соударения под углом. При таком столкновении существенную роль играет сила трения на контакте. Отсутствие силы трения (чистое скольжение) привело бы к тому, что тангенциальная компонента скорости не передавалась бы в материал. Полное слипание привело бы к отсутствию отлета ударника после столкновения. Отсутствие любого из этих эффектов существенно изменило бы волновую картину и исказило итоговую картину расслоения.

1. Математическая модель

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твёрдом теле используется система динамических уравнений (уравнения движения и реологические соотношения) [12, 13] в виде

$$\begin{aligned}\rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i, \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + F_{ij}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты скорости смещения, σ_{ij} , ϵ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, ∇_j – ковариантная производная по j -й координате, f_i – массовые силы, действующие на единицу объёма, F_{ij} – правая часть, используемая, например, для описания диссипации в моделях с учётом вязкости, вид компонент тензора 4-го порядка q_{ijkl} и правой части F_{ij} определяется реологией среды.

В случае малых деформаций тензор скоростей деформаций $e_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$ выражается через компоненты скорости смещения линейным образом $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$. В случае линейной упругости:

$$\begin{aligned}q_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ F_{ij} &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – параметры Ламе.

Систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} = f. \quad (3)$$

Здесь $u = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T$ – вектор искомых функций, x, y, z – независимые пространственные переменные, t – время, f – вектор правых частей, размерность которого равна размерности исходной системы, а выражения для компонентов зависят от реологии среды.

2. Численный метод

Для решения трёхмерной задачи (3) используется метод расщепления по направлениям. Идея метода решения исходной задачи состоит в замене исходной системы уравнений (3) одномерными системами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + A_x \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + A_y \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + A_z \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f.\end{aligned}\quad (4)$$

Спектральное исследование матриц A_x , A_y , A_z проведено в [5], где показано, что для них существует полный набор собственных значений и собственных векторов. В этом случае для любой из матриц A_x , A_y , A_z существует разложение:

$$A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega \quad (5)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$ – диагональная матрица соответствующих собственных значений, а Ω – матрица, строки которой (ω_i^T) являются собственными для матрицы A и удовлетворяют соотношениям $\omega_i^T A = \lambda_i \omega_i^T$. После перехода к инвариантам Римана уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

И тем самым распадается на n одномерных уравнений. Очевидно, значения инвариантов Римана переносятся с нижнего временного слоя t^n на верхний временной слой t^{n+1} вдоль характеристических прямых Γ , таких что $\frac{dx}{dt} = \lambda$.

Идея сеточно-характеристического метода на неструктурированных сетках изложена в [6]. В ходе расчёта для каждой характеристики, выпущенной из точки на верхнем временном слое, по углу наклона λ и шагу по времени τ определяется ячейка сетки на предыдущем временном слое, в который попала характеристика Γ_i (рисунок 1). В данной работе используются сетки из тетраэдров (рисунок 2).

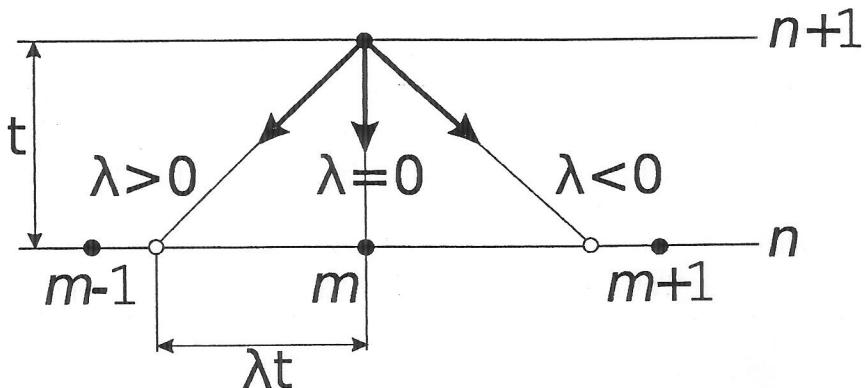


Рисунок 1 – Принципиальная схема сеточно-характеристического метода.

В точке пересечения характеристики Γ_i , выпущенной из верхнего слоя t^{n+1} , с предыдущим времененным слоем тем или иным способом определяются значения соответствующего инварианта Римана. Способы реконструкции могут быть различными, в данной работе используется интерполяция первого и второго порядка, реализованная в соответствии с подходом к построению схем интерполяции высоких порядков на неструктурированных тетраэдральных сетках из [14].

Гибридная схема на неструктурной сетке использует схемы с интерполяцией первого и второго порядка как опорные. В зависимости от локальной гладкости численного решения происходит переключение между схемами: на гладких участках используется схема второго порядка, в области разрывов происходит переключение на схему первого порядка.

Значение инварианта вдоль Γ_i будет перенесено в точку x_m на новом временном слое. После того, как в точке x_{m+1}^{n+1} описанным образом найдены все девять инвариантов Римана, можно найти в ней исходные переменные u .

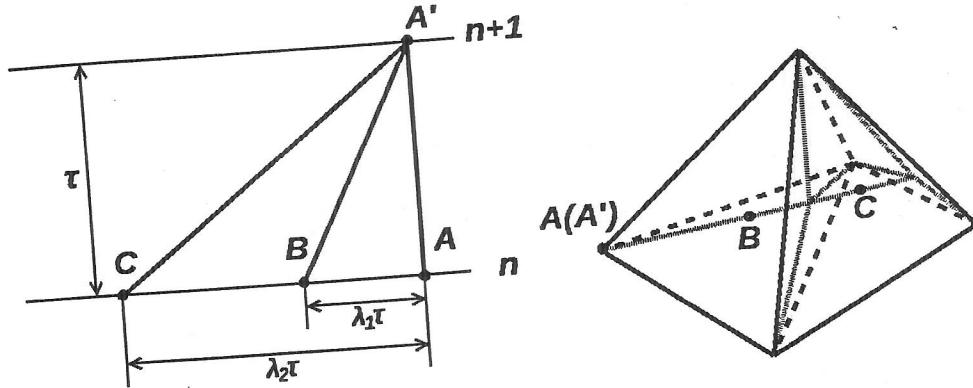


Рисунок 2 – Характеристики на неструктурированной сетке. Слева – расчет внутреннего узла. Все характеристики, выходящие из узла на новом временном слое, попадают внутрь области. Справа – положение необходимых точек в тетраэдрах при неподвижной сетке.

В случае, когда узел находится на границе расчётной области, рассматриваемая система уравнений имеет ровно три [5] выводящие характеристики. Поэтому для корректной постановки задачи требуется задание граничных условий для каждого граничного узла сетки в количестве, равном числу выводящих характеристик.

Свободная граница: $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$. Здесь σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжения в граничной точке.

Заданная внешняя сила: $\sigma_n = \sigma_{n0}$, $\sigma_\tau = \sigma_{\tau0}$. Здесь σ_{n0} и $\sigma_{\tau0}$ – заданные извне нормальное и тангенциальное напряжения в граничной точке.

Заданная скорость границы: $v = v_0$. Здесь v_0 – заданный извне вектор скорости в точке границы.

Расчёт контактной границы между двумя телами в целом аналогичен расчёту границы тела. Однако в точке контакта присутствуют два узла – по одному из каждого контактирующего тела. Уравнения связей должны задавать 6 условий, чтобы компенсировать 3 несовместные уравнения в каждом узле. В результате получается система из 18 уравнений относительно векторов неизвестных в двух узлах. Решая эту систему, получаем согласованные значения функции в обоих контактирующих узлах.

Скольжение тел друг относительно друга: $v_n = \tilde{v}_n$, $\sigma_n = \tilde{\sigma}_n$, $\sigma_{\tau0} = \tilde{\sigma}_{\tau0} = \sigma_{\tau1} = \tilde{\sigma}_{\tau1} = 0$. Здесь σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжения в граничной точке. Символы с чертой относятся к первому телу, без черты – ко второму. Условие используется для контакта ударника и обшивки.

Слипание тел: $v_n = \tilde{v}_n$, $v_{\tau0} = \tilde{v}_{\tau0}$, $v_{\tau1} = \tilde{v}_{\tau1}$.

3. Моделирование разрушения контакта

Одним из характерных механизмов разрушения композиционного материала является разрушение контакта между различными слоями композита либо между матрицей и волокнами. Для моделирования этого процесса можно ограничиться разрушением контакта вдоль заранее заданных поверхностей, и не перестраивать сетку

в расчетной области. В данной работе предлагается следующий алгоритм обработки разрушающего контакта.

Каждый контактирующий узел может находиться в одном из двух состояний: целом или разрушенном. При расчете контакта принимается во внимание только состояние реального узла, состояние виртуального узла игнорируется. Для разрушенного узла всегда применяется алгоритм контакта с трением (или чистым скольжением при нулевом коэффициенте трения), и такой узел не может перейти в неразрушенное состояние. Для неразрушенного узла применяется следующий алгоритм:

1. Предварительный шаг. Предполагаем, что узлы находятся в состоянии полного слипания. Рассчитываем скорости и напряжения (\vec{v}^*, σ^*) согласно соответствующему контактному условию. Получаем силу, действующую на контактирующие узлы ($\vec{f}^* = \sigma^* \cdot \vec{n}$).

2. Проверка выполнения критерия разрушения:

$$|\vec{f}^*| \geq f_0, \quad (7)$$

где f_0 – адгезионная прочность. При выполнении данного условия происходит разрушение контакта. Расчет для полного слипания предполагается некорректным, и применяется алгоритм расчета разрушенного узла.

3. В том случае, если критерий разрушения (7) не выполняется, расчет полного слипания является корректным. Для нового шага по времени берем рассчитанные значения \vec{v}^* и σ^* .

5. Постановка задачи

Рассматриваются различные постановки задачи:

1. Один ударник.
 - a. нормальный удар;
 - b. удар под углом.
2. Два ударника:
 - a. одновременный удар;
 - b. удар с малой задержкой по времени;
 - c. удар с большой задержкой по времени.
3. Четыре ударника:
 - a. одновременный удар;
 - b. удар с малой задержкой по времени;
 - c. удар с большой задержкой по времени.

Материал моделируется следующим образом: три слоя, между которыми стоит условие разрушающего контакта с порогом разрушения 42 МПа, считаются упругими телами с параметрами субпакета из таблицы 1. Материал ударника – сталь.

Энергия удара – 50, 100 и 150 Дж, распределена между ударниками поровну. Радиус ударника для случая одного ударника $r_{single} = 1.5$ мм, для двух – $r_{double} = 1.1906$ мм, для четырех – $r_{quad} = 0.9445$ мм.

Общий вид конструкции представлен на рисунке 3. условие на контакте между ударником и композитом – чистое скольжение. Шаг по времени выбран из условия

Куранта, $\tau = 1,91 \cdot 10^{-8}$ сек. Для малой задержки по времени разница между ударами составляет 100 шагов по времени ($\Delta t_m = 1.91 \cdot 10^{-6}$ сек), для большой – 300 шагов по времени ($\Delta t_b = 5.73 \cdot 10^{-6}$ сек).

Для столкновения под углом был взят коэффициент трения $k = 0.1$, были рассмотрены углы столкновения $10^0, 30^0, 60^0$.

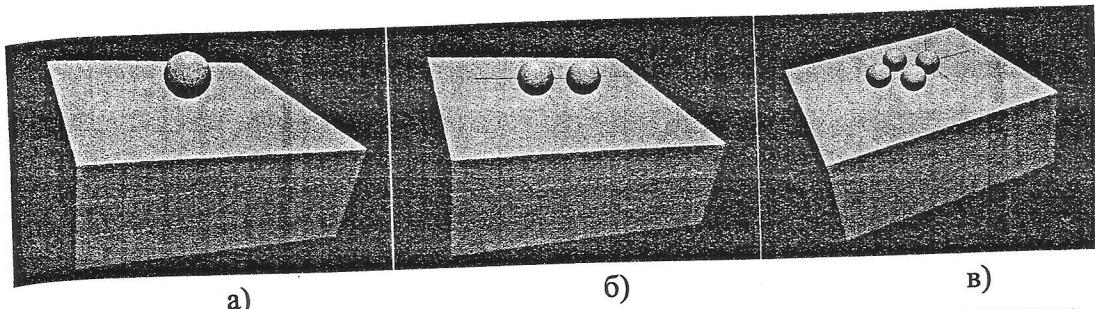


Рисунок 3 – Общий вид геометрии: а – один ударник; б – два ударника, в – четыре ударника

Таблица 1. Упругие характеристики слоёв и ударника

Материал	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³	λ , ГПа	μ , ГПа	c_p , м/с	c_s , м/с
Монослой (субпакет)	8.5	0.32	1580	5.72	3.22	2775	1425
Сталь	200	0.28	7800	99.43	78.13	5725	3165

6. Результаты расчетов

На рисунках 4 и 5 представлены результаты расчета для одного ударника. На рисунке 4 представлено распределение скоростей деформации и областей расслоения в различные моменты времени в сечении XZ, проходящем через точку соударения, для энергии соударения 50 Дж и одного ударника. На рисунке 5 представлены области расслоения для различной энергии соударения.

Можно видеть характерную кольцевую форму расслоения, вызванную сдвиговыми напряжениями на контакте. Фронт продольной волны от точки соударения имеет сферическую форму. Непосредственно под ударником волна сжатия проходит через контакт, не повреждая его. На некотором расстоянии от точки соударения у силы, действующей на контакт, появляется тангенциальная компонента, и сдвиговые напряжения на контакте превышают порог адгезионной прочности. При удалении от точки соударения волна рассеивается, и контакт перестает разрушаться.

Волны растяжения, формирующиеся при отлете шарика и при отражении волн сжатия от тыльной поверхности образца, в данной постановке имеют слишком малую амплитуду, чтобы разрушить контакт.

На верхнем слое около боковых границ образца видны (рисунок 5) краевые эффекты, наличие которых наблюдается в экспериментах [9].

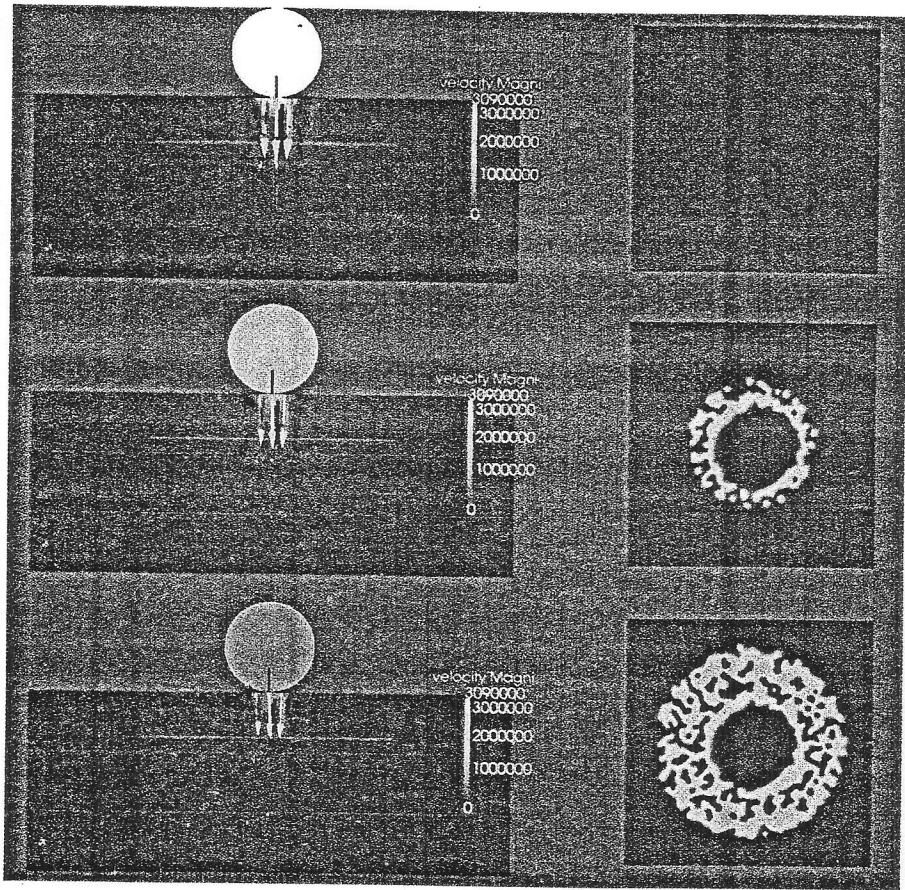


Рисунок 4 – Результаты для случая одного ударника и энергии соударения 50 Дж на срезе XZ, проходящем через точку соударения, шаги по времени 100, 200, 300. Слева – распределение скоростей деформации, справа – области расслоения между верхним и средним слоем

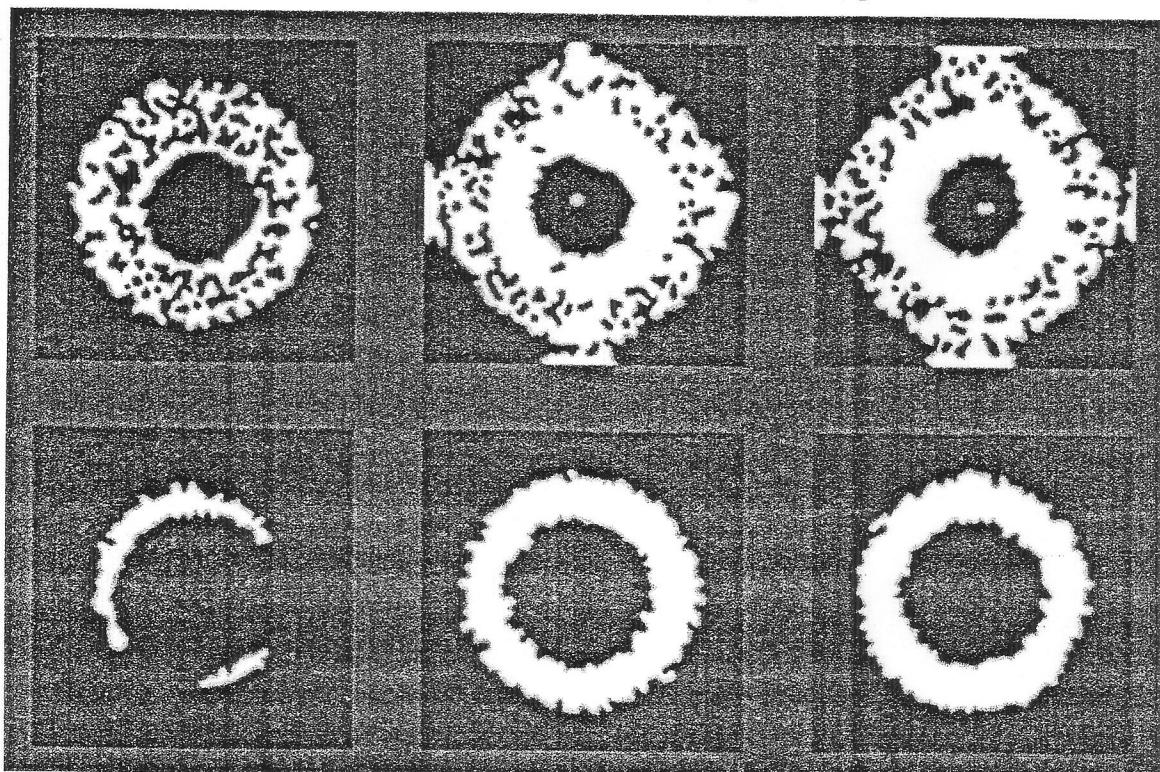


Рисунок 5 – Области расслоения для случая одного ударника и различной энергии соударения: слева – 50 Дж, посередине – 100 Дж, справа – 150 Дж. Сверху – расслоение между верхним и средним слоем, снизу – между средним и нижним

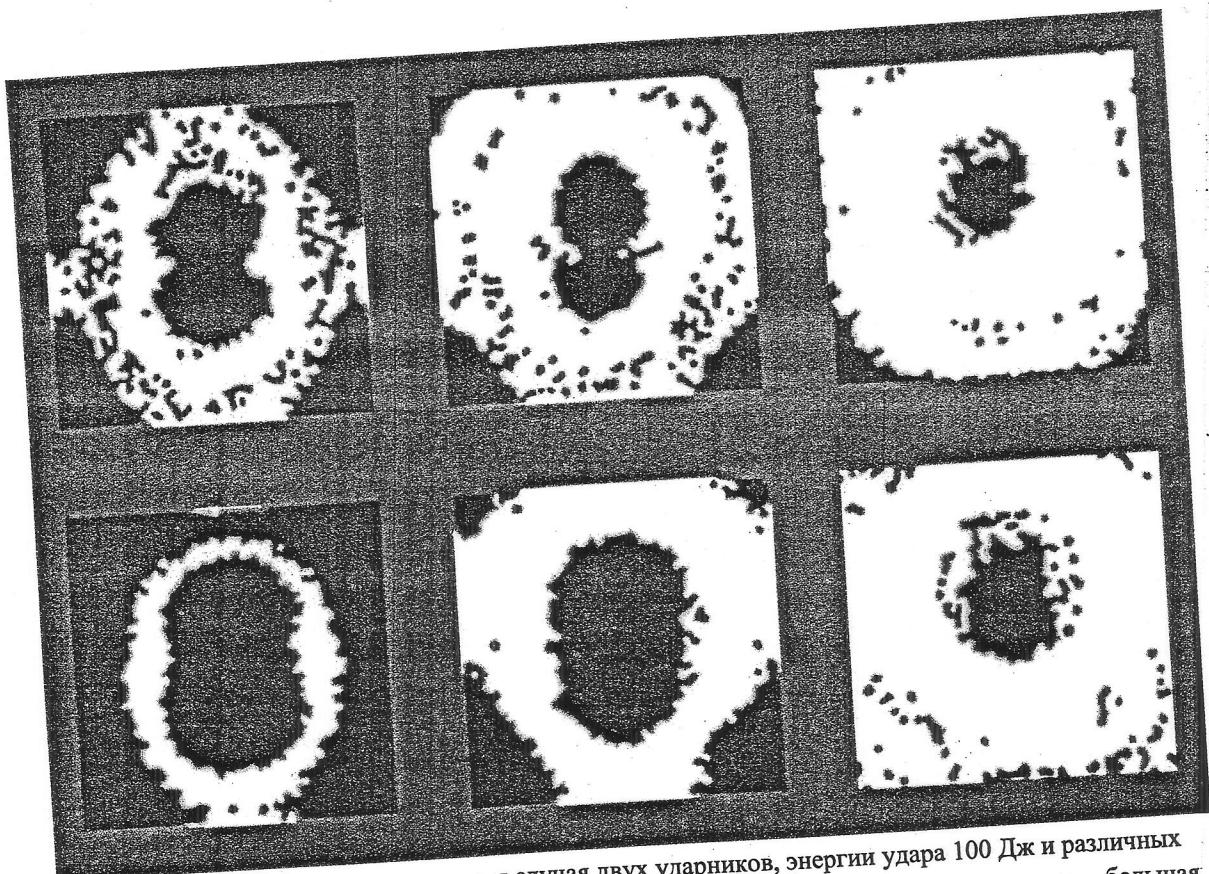


Рисунок 6 – Области расслоения для случая двух ударников, энергии удара 100 Дж и различных режимах соударения: слева – одновременный удар, посередине – малая задержка, справа – большая задержка. Сверху – расслоение между верхним и средним слоем, снизу – между средним и нижним

На рисунке 6 представлены результаты расчета для двух ударников – области расслоения при различных режимах соударения. В случае одновременного столкновения с двумя ударниками волны сжатия от них интерферируют. Сдвиговые компоненты напряжений и тангенциальные скорости на контакте в области между ударниками компенсируют друг друга, и контакт остается неразрушенным.

При неодновременном ударе можно видеть существенную асимметрию, вызванную разницей во времени между соударениями. Волна сжатия от второго ударника не успевает дойти до контакта, поэтому волна от первого ударника успевает разрушить большую область, чем при одновременном ударе.

В случае большего времени между соударениями волна сжатия от второго ударника приходит на контакт уже после того, как образовалась область разрушения от первого соударения. Интерференция волн уже несущественна, и области разрушения накладываются друг на друга. Общая площадь разрушенного контакта существенно выше, чем для одновременного удара.

На рисунке 7 представлены результаты расчета для четырех ударников – области расслоения при различных режимах соударения. В случае соударения четырьмя ударниками область расслоения заметно меньше, чем при столкновении с двумя ударниками. В первую очередь это происходит из-за того, что ударники разнесены на большее расстояние, и энергия соударения распространяется на больший объем материала, чем в случае столкновения с двумя и, тем более, одним ударником.

область сокращается вследствие интерференции волн в области между точками соударения

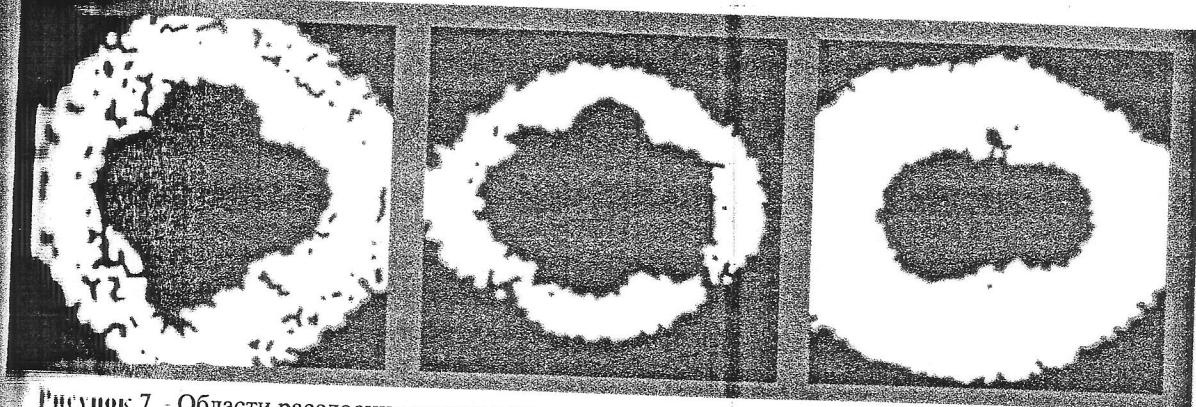


Рисунок 7 - Области расслоения между верхним и средним слоями для случая четырех ударников, энергии удара 50 Дж и различных режимах соударения: слева – одновременный удар, посередине – малая задержка, справа – большая задержка

На рисунке 8 представлены области расслоения при различных режимах соударения. При увеличении угла соударения область разрушения уменьшается и смещается в сторону направления скорости. При угле 30^0 появляется заметная асимметрия. При угле 60^0 картина расслоения существенно меняется. Интенсивность продольной волны при таком соударении слишком низка, чтобы вызвать расслоение. Наибольшее влияние на картину расслоения оказывает сдвиговая волна, генерируемая при соударении.

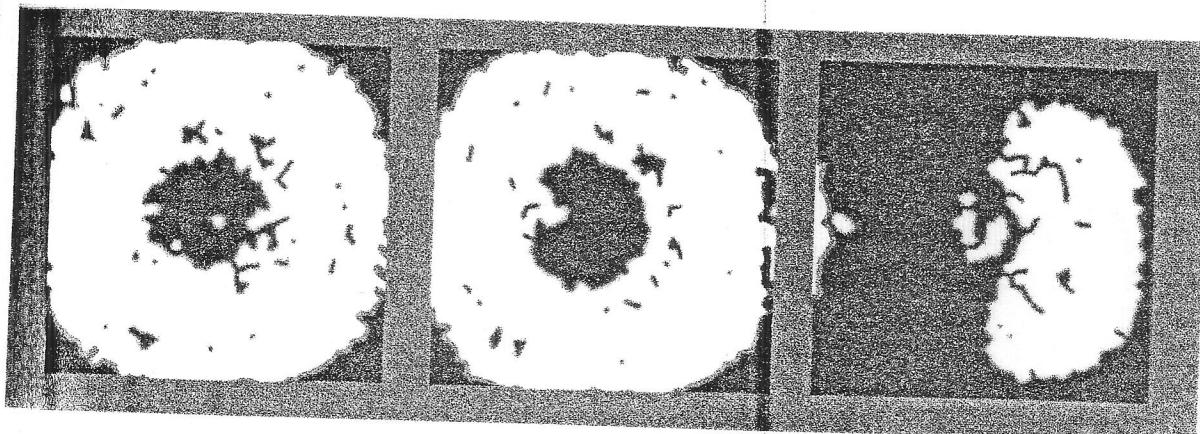


Рисунок 8 – Области расслоения между верхним и средним слоями для случая удара под углом, энергии удара 50 Дж и различных режимах соударения: слева – 10^0 , посередине – 30^0 , справа – 60^0

Из приведенных результатов следует, что итоговая картина разрушения при множественном ударе в большой степени определяется интерференцией упругих волн, идущих от точки соударения. Форма и общая площадь разрушенной области зависит не только от массы ударников и скорости соударения, но и от времени задержки между отдельными ударами. Соударение композитной детали с объектом сложной формы, который имеет несколько точек соприкосновения с деталью, может приводить к схожим эффектам.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-07-00884.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. M.J. Hinton, A.S. Kaddour. Maturity of 3D failure criteria for fibre-reinforced composites: Comparison between theories and experiments: Part B of WWFE-II // Journal of Composite Materials, 2013, №7, pp 925-966.
2. К. А. Беклемышева, А. В. Васюков, А. С. Ермаков, И. Б. Петров. Численное моделирование при помощи сеточно-характеристического метода разрушения композиционных материалов // Матем. моделирование, 28:2 (2016), 97–110.
3. К. А. Беклемышева, А. В. Васюков, А. С. Ермаков, И. Б. Петров, А.С. Дзюба, В.И. Голован. Численное моделирование динамических процессов при низкоскоростном ударе по композитной стрингерной панели // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 9. – С. 96 – 110.
4. К.М. Магомедов, А.С. Холодов. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука. 1988.
5. Ф.Б. Челников. Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнения упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Математическое моделирование, 2006, Т.18, №6, С. 96-108.
6. K.A. Beklemysheva, A.A. Danilov, I.B. Petrov, Y.V. Vassilevsky, A.V. Vasyukov. Virtual blunt injury of human thorax: Age-dependent response of vascular system // Russian Journal Of Numerical Analysis And Mathematical Modelling, 2015, v. 30, №5, pp 259-268.
7. I. B. Petrov, A. V. Favorskaya, A. V. Vasyukov, A. S. Ermakov, K. A. Beklemysheva, A. O. Kazakov, A. V. Novikov. Numerical simulation of wave propagation in anisotropic media. // Doklady Mathematics, 2014, v. 90, №3, pp 778-780.
8. Richardson, M. O. W. & Wisheart, M. J., Review of low-velocity impact properties of composite materials, Composites Part A-Applied Science and Manufacturing, 1996, vol. 27, no. 12, pp. 1123-1131.
9. Sjoblom, P.O., Hartness, J.T. and Cordell, T.M. On low-velocity impact testing of composite materials. *J. Compos. Mater.* 1988, 22, 30-52
10. Cantwell, W.J. and Morton, J. The impact resistance of composite materials. *Composites* 1991, 22(5), 347-362
11. Liu, D. and Malvern, L.E. Matrix cracking in impacted glass/ epoxy plates. *J. Compos. Mater.* 1987, 21, 594-609.
12. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Изд. Мир, 1975, 872 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. – М.: Наука, 1970, с.143.
14. Петров И.Б. , Фаворская А.В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдрических сетках // Журнал Информационные технологии, 2011, №9, с.30 - 32.