

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ

ЕМЕЛЬЯНОВ ЯРОСЛАВ ИГОРЕВИЧ

**Применение компактных
сеточно-характеристических схем для
решения гиперболических систем
уравнений с переменными
коэффициентами**

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Направление подготовки 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

Научный руководитель _____ к.ф.-м.н. Н.И. Хохлов

Студент _____ Я.И. Емельянов

г. Долгопрудный
2016

Содержание

1	Введение	2
1.1	Уравнение переноса	2
1.2	Уравнение акустики	3
1.3	Численные методы	3
2	Схема БИС	4
2.1	Схема СР	4
2.2	Схемы БИС1 и БИС2	5
3	Решение уравнения акустики	9
3.1	Задача Римана	10
4	Численные решения вблизи границ раздела двух сред	12
4.1	Уравнение переноса	12
4.2	Уравнение акустики	14
4.3	Алгоритм расчёта уравнения акустики	15
5	Вычислительный эксперимент	16
5.1	Уравнение переноса	16
5.2	Уравнение акустики	23
6	Вывод	25
	Список литературы	26

1 Введение

В данной работе, во-первых, производится обзор некоторых существующих методов решения гиперболических систем уравнений, во-вторых, рассматривается вопрос применения схем высокого порядка точности для численного решения физических задач, где возникают такие уравнения, например, явление переноса вещества и распространение акустических волн, в-третьих, обсуждается проблема сохранения порядка аппроксимации в гетерогенных средах и при разрывных начальных условиях, проводятся численные эксперименты, подтверждающие сохранения порядка.

1.1 Уравнение переноса

Уравнение переноса выглядит так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

В общем случае параметр среды c , называемый также скоростью звука, может зависеть от координат, в этом случае среда называется гетерогенной, а в случае $c = \text{const}$ – гомогенной. В рассматриваемой работе будут описаны решения и приведены расчёты для уравнений, где скорость звука является кусочно-постоянной функцией. Для решения задачи Коши необходимо также задать начальные данные начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

и граничное условие

$$u(0, t) = g(t)$$

Как нетрудно видеть, для гладких начальных данных решением данного уравнения будет являться функция $u_0(x - ct)$. Данное решение может также определяться в обобщенном смысле в случае, когда начальные данные не являются непрерывно дифференцируемыми функциями.

1.2 Уравнение акустики

Уравнение акустики для одномерного случая может быть задано в виде системы 2 уравнений:

$$\begin{cases} \rho u_t + p_x = 0 \\ p_t + \kappa u_x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность среды, κ – модуль упругости. Для решения задачи Коши необходимо также задать начальные данные: $p(x, 0), p(0, t), u(x, 0), u(0, t)$.

1.3 Численные методы

Поскольку точные решения данных задач можно отыскать только для ограниченного набора случаев, чаще всего не представляющих практического интереса, возникает необходимость их решения с помощью численных методов. К таковым относятся, например, метод конечных разностей [5], конечных объёмов [1], [10] и метод Галёркина [9], [11]. Метод конечных разностей, рассматриваемый в данной работе, подразумевает задание сетки, в узлах которой хранятся значения величины, и разностной схемы, с помощью которой вычисляются значения в узлах на каждом новом временном шаге. Такие схемы называют условно устойчивыми, если выполнено условие Куранта [3]:

$$\frac{c \cdot t}{h} \leq 1,$$

где t и h – шаги по времени и пространству соответственно.

При рассмотрении разностных схем важно, насколько хорошо совпадают результаты их работы с теоретическими результатами. В частности, говорят, что конечно-разностный оператор R_h аппроксимирует дифференциальный оператор L на множестве U , если

$$\|L(u) - R_h(u_h)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \quad (\forall u \in U) \quad (3)$$

Норму в данном случае можно определять различными способами, например, использовать дискретные аналоги норм L_1 , L_2 и L_∞ . Можно ввести также порядок аппроксимации – число k такое, что:

$$\|L(u) - R_h(u_h)\| \leq h^k M, \quad h \rightarrow 0 \quad (\forall u \in U) \quad (4)$$

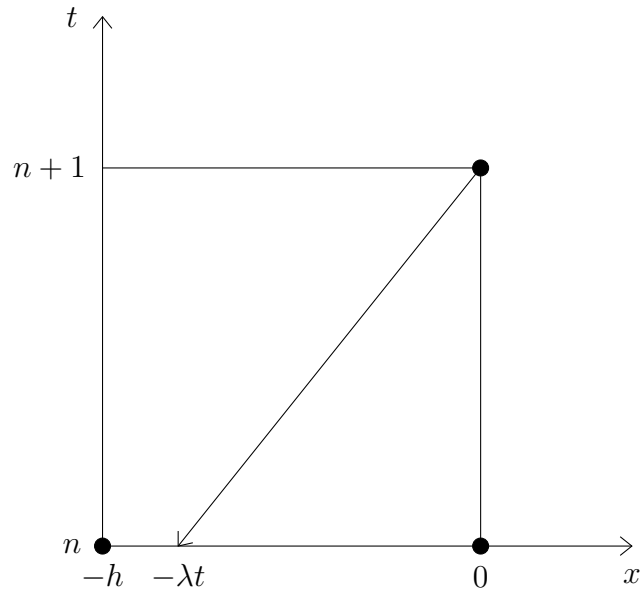


Рис. 1: Шаблон разностной схемы

M при этом не должна зависеть от h , но может зависеть от U [4]. Порядок, таким образом, показывает, насколько быстро решение разностной задачи приближается к решению дифференциальной задачи при сгущении сетки. Видно, что высокий порядок аппроксимации может обеспечить более высокую точность при меньшем расходе памяти, и возникает задача создания схем высокого порядка точности.

2 Схема БИС

2.1 Схема СІР

Для того чтобы повысить порядок схемы на трёхточечном шаблоне, необходимо использовать дополнительные уравнения. В частности, это могут быть дифференциальное следствие уравнения (1), получаемое дифференцированием обеих его частей по x [6]:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + c \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \quad \nu = u_x \quad (5)$$

На рассматриваемом шаблоне (t^n, x_{m-1}) , (t^n, x_m) , (t^{n+1}, x_m) , таким образом, можно построить полином не более чем 3 степени, коэффициенты которого

выражаются через значения u и ν в точках (t^n, x_{m-1}) , (t^n, x_m) . Можно также рассмотреть схему, учитывающую помимо первых также и вторые производные по пространству [8]. Данная схема называется CIP – Cubic Interpolation Profile. Подробнее эта схема изложена, например, в [6], [15], [18], [7]. В [6] показано, что для однородных сред она даёт 3 порядок точности для достаточно гладких начальных данных, но на разрывных начальных данных она даёт осцилляции [2]. Существуют различные способы борьбы с ними: использование ограничителя, основанного на точке (t^n, x_{m+1}) , либо гибридизация схемы. В нашей работе используется второй подход.

2.2 Схемы БИС1 и БИС2

Существует два подхода, как обеспечивать гибридизацию схемы [2]. Первый подход – использование сеточно-характеристического критерия монотонности [4]:

$$\min(u_m, u_{m+1}) \leq u_m^{n+1} \leq \max(u_m, u_{m+1}) \quad (6)$$

Схемы, обладающие таким свойством, называются TVD (Total Variance Diminishing). Суть такой гибридизации в следующем: производится вычисление с помощью полиномов высокого порядка, и в случае, если условие (6) не выполнено, то порядок полинома понижается. Заметим при этом, что для полинома 1 порядка условие (6) выполнено всегда, поэтому данная схема даст результат не хуже, чем схема CIR.

Помимо этого, можно добиться от схемы CIP монотонного поведения, понижая порядок интерполяционного полинома в тех случаях, когда полином более высокого порядка даёт осцилляции на рассматриваемом участке. Для этого достаточно посмотреть на положение его экстремумов относительно рассматриваемого интервала и в случае, если хотя бы один из экстремумов полинома 3 порядка попал в интервал $(-h, 0)$, то необходимо понижать порядок, заменяя полином 3 порядка либо на один из полиномов 2 порядка F_{2l} , F_{2r} . Полином F_{2l} строится с помощью точек u_{m-1}, u_m, ν_{m-1} исходя из условий

$$F_{2l}(0) = u_m, \quad F_{2l}(-h) = u_{m-1}, \quad F'_{2l}(-h) = \nu_{m-1},$$

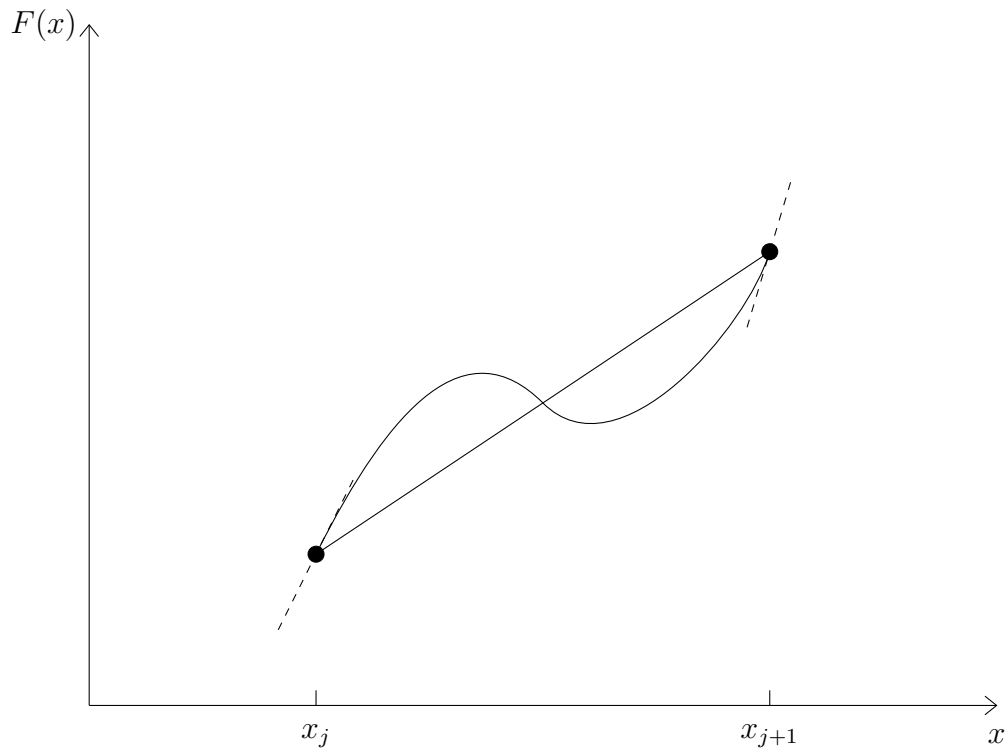


Рис. 2: Полином 3 порядка на рассматриваемом шаблоне. Видно, что т. к. полином 3 порядка имеет экстремум, то его использование приведёт к возникновению нефизических осцилляций в решении, и необходимо использовать полином более низкого порядка.

а полином F_{2l} – с помощью точек u_{m-1}, u_m, ν_m исходя из условий

$$F_{2l}(0) = u_m, F_{2l}(-h) = u_{m-1}, F'_{2l}(0) = \nu_{m-1}$$

Данная схема описана в [2] и получила название БИС2.

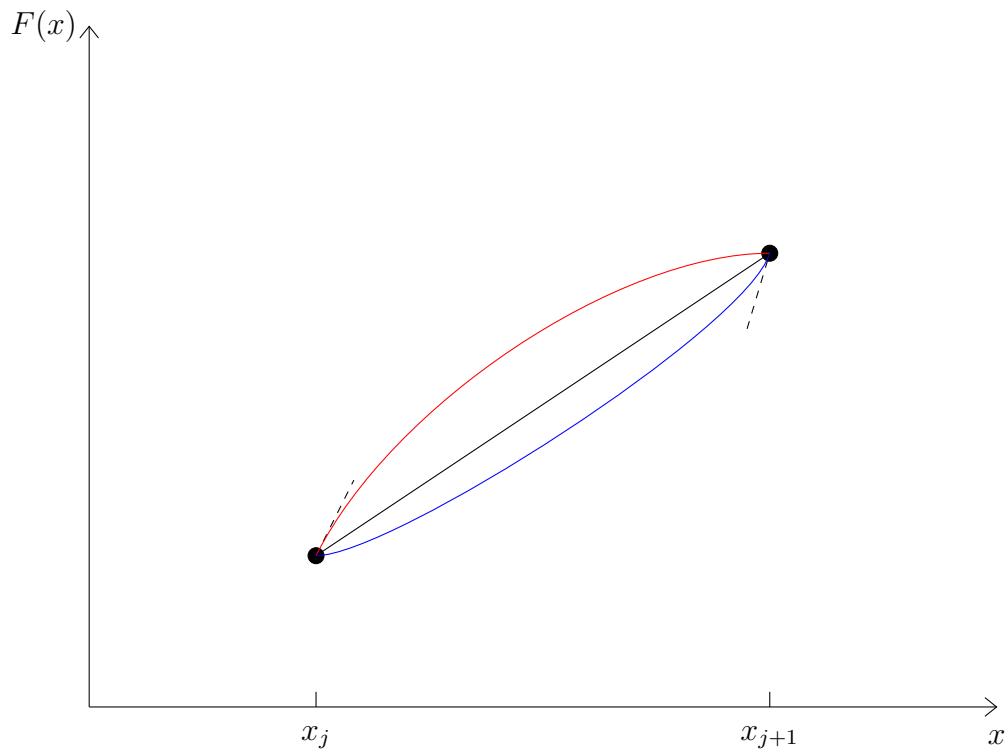


Рис. 3: Полиномы F_{2l} (красный) и F_{2r} (синий) на рассматриваемом шаблоне. Т. к. они лежат по разные стороны от прямой, соединяющей две точки, то их линейной комбинацией можно аппроксимировать решение их линейной комбинацией либо тем полиномом, который ближе к прямой (в нашем случае это F_{2r}).

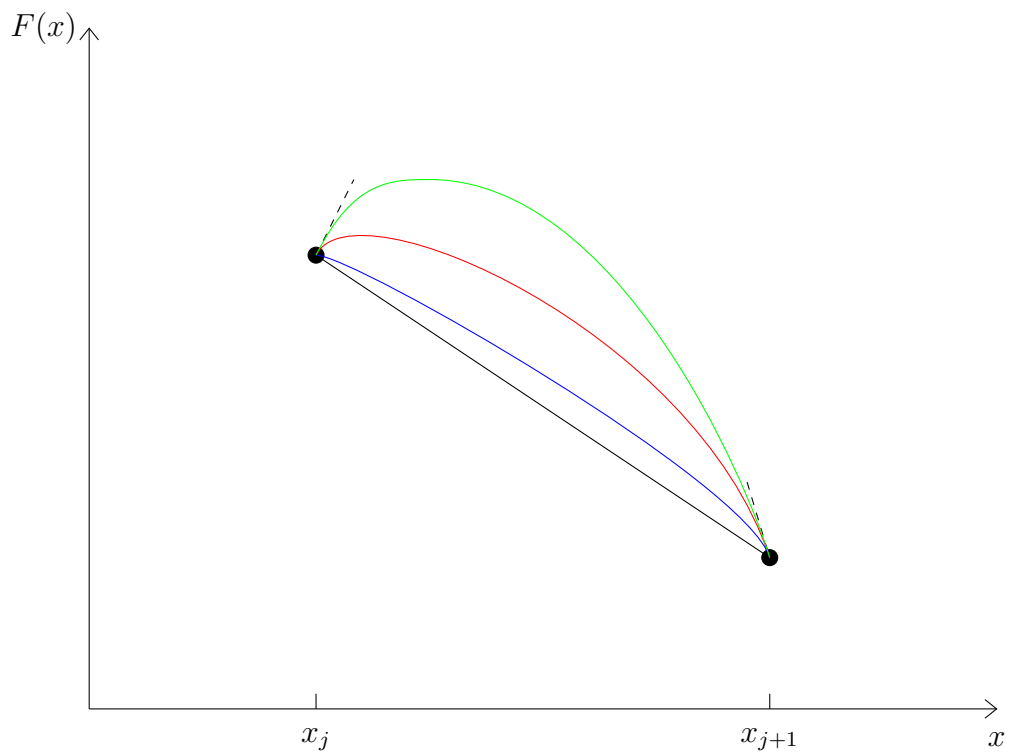


Рис. 4: Полиномы F_3 (зеленый), F_{2l} (красный) и F_{2r} (синий) в ситуации, когда на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ величина $(u_{x+1} - u_j)/h$ не совпадает по знаку с ν_j и ν_{j+1} . В этом случае все полиномы порядка выше первого имеют экстремум, и для получения монотонного решения нужно использовать полином 1 порядка

3 Решение уравнения акустики

Уравнение (2) может быть переписано в матричной форме [1]:

$$U_t + AU_x = 0 \quad (7)$$

, где

$$U = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ p(x, t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Как видно, в матричной форме уравнение (2) представляет из себя уравнение переноса, и его можно было бы так решить. Характеристическое уравнение для матрицы A :

$$\lambda^2 - \kappa/\rho = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

Так как все собственные значения матрицы A вещественны, то можно перейти к новым переменным, диагонализовав матрицу A :

$$A(x) = R(x)^{-1}\Lambda(x)R(x),$$

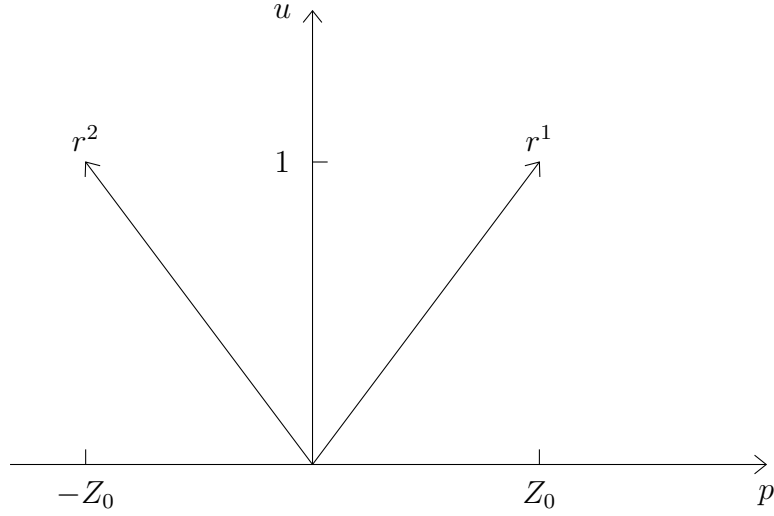
где

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} c(x) & 0 \\ 0 & -c(x) \end{pmatrix} \quad R(x) = \begin{pmatrix} -Z(x) & Z(x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Здесь $c = \sqrt{\kappa/\rho}$ - скорость звука, $Z = \sqrt{\kappa \cdot \rho}$ - акустический импеданс. Для начала нужно рассмотреть более простой случай, когда c и Z постоянны во всей среде. Тогда матрица A не зависит от x , и, домножив обе части уравнения (2) на Z^{-1} и сделав замену $q = UZ^{-1}$, перейдем к системе

$$q_t + \Lambda q_x = 0, \quad (10)$$

которая ввиду диагональности Λ разбивается на 2 независимых уравнения переноса. Заметим, что скорости распространения этих волн равны по модулю и противоположны по знаку, то есть в новых переменных мы получаем две "разбегающиеся" друг от друга волны, соответствующие собственным векторам матрицы A - столбцам матрицы R :



3.1 Задача Римана

Задача Римана [1] состоит в том, чтобы описать решение уравнения (1) или (2) для начальных данных специального вида:

$$U = \begin{cases} U_l, & x \leq 0 \\ U_r, & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

Тогда $U_{l,r}$ можно разложить по базису из собственных векторов матрицы A :

$$U_l = \sum w_l^p r^p, \quad U_r = \sum w_r^p r^p$$

Разрыв в начальных данных может переноситься только вдоль прямых, параллельных r^i , которые называются характеристиками, и можно описать промежуточное состояние q_m . В случае системы из двух уравнений это состояние можно описать как $q_m = w_r^1 r^1 + w_l^2 r^2$. Двигаясь вдоль характеристик, можно вычислить промежуточное состояние. Проиллюстрируем это графически:

Используя данную технику, можно получить формулу для вычисления U_m в уравнении акустики [1]:

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{2}(p_l + p_r) - \frac{Z}{2}(u_r - u_l), \\ u_m &= \frac{1}{2}(u_l + u_r) - \frac{1}{2Z}(p_r - p_l), \end{aligned} \quad (12)$$

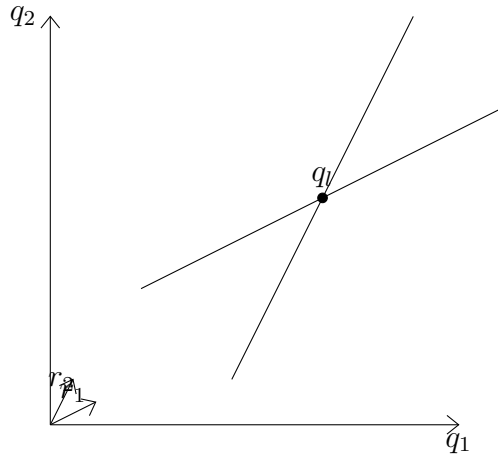


Рис. 5: Характеристики для двумерной задачи Римана

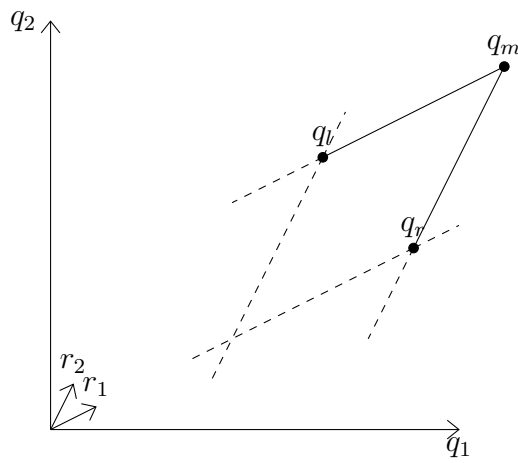


Рис. 6: Нахождение промежуточного состояния с помощью характеристик

4 Численные решения вблизи границ раздела двух сред

4.1 Уравнение переноса

Пусть в уравнении (1) c зависит от x :

$$c = \begin{cases} c_1, & a \leq x < \alpha \\ c_2, & \alpha \leq x \leq b \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае нужно вносить модификацию в разностную схему для обсчета узлов, находящихся вблизи точки разрыва, т. к. нужно принять во внимание разрывность точного решения задачи Коши на границе раздела сред [3]. Учтем также наличие физических ограничений, налагаемых на решение: в нашем случае это $[u] = 0$ – непрерывность плотности [1]. Вблизи разрыва тангенциальная компонента скорости претерпевает разрыв, в то время как нормальная компонента скорости и давление претерпевают разрыв лишь для первых производных [3]. При создании сетки возможны 2 варианта: α попадает внутрь интервала (x_{j-1}, x_j) либо α совпадает с каким-то x_j . Для первого случая вывод описан в [6], мы же рассмотрим второй случай. Тогда, т. к. в точке разрыва верно

$$u^-(x_k) = u^+(x_k), \quad c^- u_x^-(x_k) + c^+ u_x^+(x_k) \quad (14)$$

то величина $v_k = c^- u_x^-(x_k) + c^+ u_x^+(x_k)$, называемая потоком, будет сохраняться при переходе из одной среды в другую, а коэффициенты для интерполяционного полинома $H(\cdot)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ будут задаваться из системы уравнений [6]:

$$\begin{cases} H(x_{k-1}) = u_{k-1} \\ H_x(x_{k-1}) = v_{k-1} \\ H(x_k) = u_k \\ H_x(x_k) = v_k/c^-, \end{cases} \quad (15)$$

а на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ – из системы

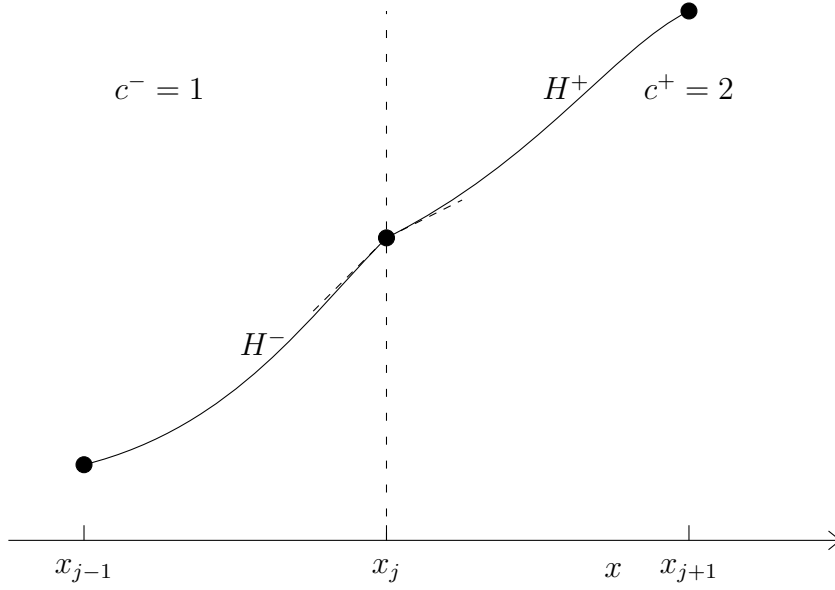
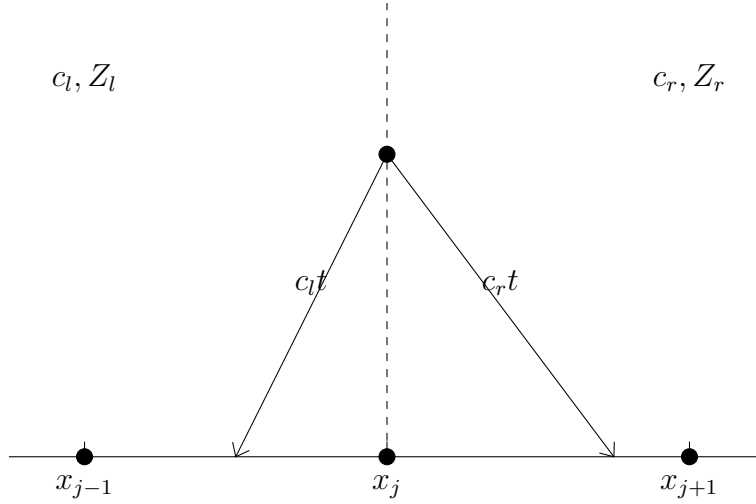


Рис. 7: Интерполяционные полиномы слева и справа от границы раздела сред. Виден излом на границе, вызванный неравенством скоростей слева и справа от неё

$$\begin{cases} H(x_k) = u_k \\ H_x(x_k) = v_k/c^+ \\ H(x_{k+1}) = u_{k+1} \\ H_x(x_{k+1}) = v_{k+1} \end{cases} \quad (16)$$

Данный подход описан в статье [6] и назван там Immersed Interface Profile, мы будем придерживаться такого же названия. Он обеспечивает сохранение третьего порядка аппроксимации по пространству в окрестности разрыва, которая состоит из 3 узлов: узла, в котором скорость меняет значение, и по одному узлу слева и справа от него. Во всех остальных точках используется стандартная схема SIP либо БИС. Таким образом, схема SIP может использоваться для решения гиперболических уравнений в большом количестве практических случаев как для простых решёток, [12], [20], так и для более сложных конфигураций [14], [13], [17], [19].



4.2 Уравнение акустики

Пусть в (2) среда имеет следующие параметры:

$$\rho = \begin{cases} \rho_l, & a \leq x < \alpha \\ \rho_r, & \alpha \leq x \leq b \end{cases} \quad \kappa = \begin{cases} \kappa_l, & a \leq x < \alpha \\ \kappa_r, & \alpha \leq x \leq b \end{cases} \quad (17)$$

В этом случае, когда волна дойдет до границы раздела сред, она частично пройдет и может частично отразиться. Рассмотрим этот процесс подробнее [16]. На границе раздела двух сред, для которых $c_l \neq c_r$, больше не будет выполняться равенство по модулю для двух волн, идущих вправо и влево, т. к. матрицы перехода к диагональному виду R будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} -Z_l & Z_r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где Z_l, Z_r — значения импеданса, вычисленные справа и слева от границы раздела.

Обратная матрица

$$R^{-1} = \frac{1}{Z_l + Z_r} \begin{pmatrix} -1 & Z_r \\ 1 & Z_l \end{pmatrix}, \quad (19)$$

В этом случае формула (12) для задачи Римана потребует уточнений. Изобразим характеристики в нашем случае:

Проводя аналогичные (12) рассуждения, получаем формулы для расчёта промежуточного состояния в этом случае:

$$\begin{aligned} p &= \frac{Z_r p_l + Z_l p_r}{Z_l + Z_r} - \frac{Z_r Z_l}{Z_l + Z_r} (u_r - u_l), \\ u &= \frac{Z_l u_l + Z_l u_r}{Z_l + Z_r} - \frac{1}{Z_l + Z_r} (p_r - p_l), \end{aligned} \quad (20)$$

В случае, когда $Z_r \neq Z_l$, будут формироваться две волны: отражённая и проходящая [1]. Коэффициенты прохождения и отражения (отношение интенсивности волн к интенсивности исходной волны):

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{2Z_r}{Z_l + Z_r}, \\ C_R &= \frac{Z_r - Z_l}{Z_l + Z_r} \end{aligned} \quad (21)$$

По аналогии с уравнением переноса, необходимо организовать пересчёт потоков производных давления и скорости по координате, однако они не будут удовлетворять аналогичному (2) уравнению. В нашем случае правильными граничными условиями будут [1]:

$$[u] = 0, \quad [p] = 0, \quad , [ku_x] = 0, \quad \left[\frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (22)$$

Введём ξ, η : $\xi = \kappa u_x$, $\eta = p_x / \rho$. Тогда для ξ, η получим:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}_x = 0 \quad (23)$$

Видно, что система для новых переменных соответствует системе для старых переменных с транспонированной матрицей, поэтому, выполняя соответствующие замены, нетрудно получить формулу для расчёта ξ и η на границе разрыва:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Z_r \xi_l + Z_l \xi_r}{Z_l + Z_r} - \frac{Z_r Z_l}{Z_l + Z_r} (\eta_r - \eta_l), \\ \eta &= \frac{Z_l \eta_l + Z_l \eta_r}{Z_l + Z_r} - \frac{1}{Z_l + Z_r} (\xi_r - \xi_l), \end{aligned} \quad (24)$$

4.3 Алгоритм расчёта уравнения акустики

Опишем действия, которые необходимо совершить для j -й точки при расчёте решения уравнения акустики описанным методом

1. Если в точке x_j и в точках $x_{j\pm 1}$ нет границы раздела, расчёт и для u, v , и для u_x, v_x можно осуществлять по формуле (12), а интерполяцию на отрезках $[x_j, x_{j\pm 1}]$ выполнять с помощью схем СІР либо БИС.
2. Если в точке x_{j+1} есть разрыв, а в точке x_j, x_{j-1} нет, то расчёт снова осуществляется по формулам (12), но интерполяция на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ осуществляется с помощью полинома (16), а на другом отрезке – с помощью обычных схем.
3. Если в точке x_{j-1} есть разрыв, а в точке x_j, x_{j+1} нет, то расчёт снова осуществляется по формулам (12), но интерполяция на отрезке $[x_j, x_{j-1}]$ осуществляется с помощью полинома (15), а на другом отрезке – с помощью обычных схем.
4. Если разрыв есть в точке x_j , то интерполяция на отрезках как слева, так и справа осуществляется с помощью Immersed Interface profile, расчёт значений u и p по формулам (21), а потоков ku и p/ρ – по формулам (24).
5. В случаях, когда разрывы находятся на расстояниях ближе, чем через 2 ячейки, рекомендуется либо повысить плотность сетки, либо провести гомогенизацию [1].

5 Вычислительный эксперимент

5.1 Уравнение переноса

Качественное поведение схем рассматривалось на импульсе сложной формы

$$u(0, x) = \begin{cases} \exp(-\log 2 \cdot (x - 0.03)/(0.003))^2, & 0.02 \leq x \leq 0.04 \\ 1, & 0.06 \leq x \leq 0.08 \\ 1 - |100x - 11|, & 0.1 \leq x \leq 0.12 \\ \sqrt{1 - 10^5(x - 0.15)^2}, & 0.14 \leq x \leq 0.16 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (25)$$

Среда имела характеристики

$$c = \begin{cases} 2, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad (26)$$

на равномерной сетке $0 \leq x \leq 1$ с шагом $\frac{1}{1600}$ и периодическим граничным условием. Число шагов подбиралось исходя из числа Куранта 0.4 таким образом, чтобы возмущение за это время успевало вернуться точно в изначальное положение. Результаты показаны на рис (8) – (11):

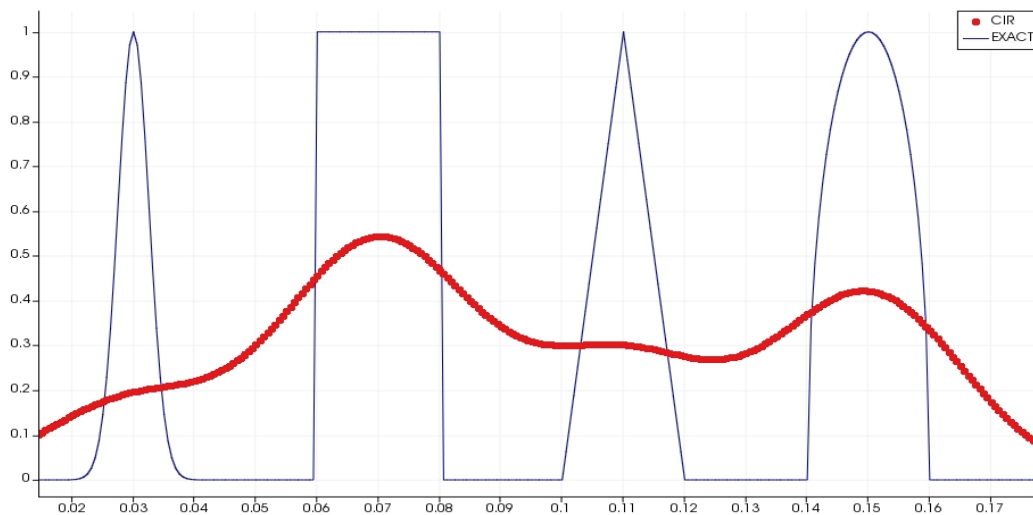


Рис. 8: CIR

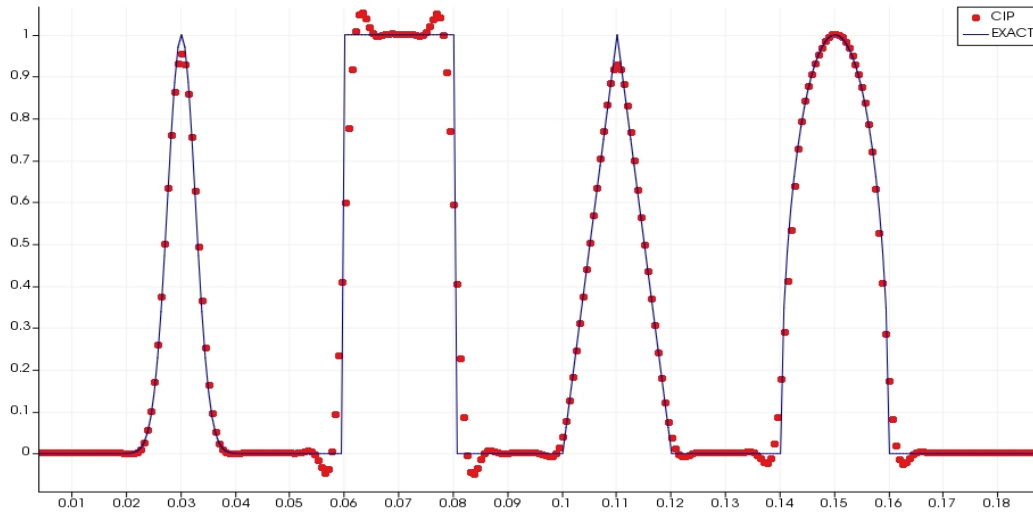


Рис. 9: CIP

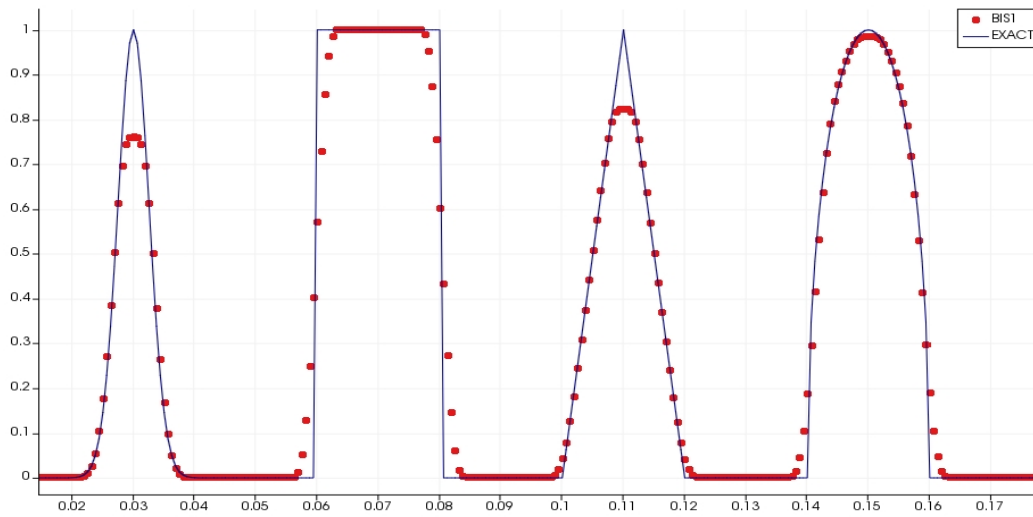


Рис. 10: БИС1

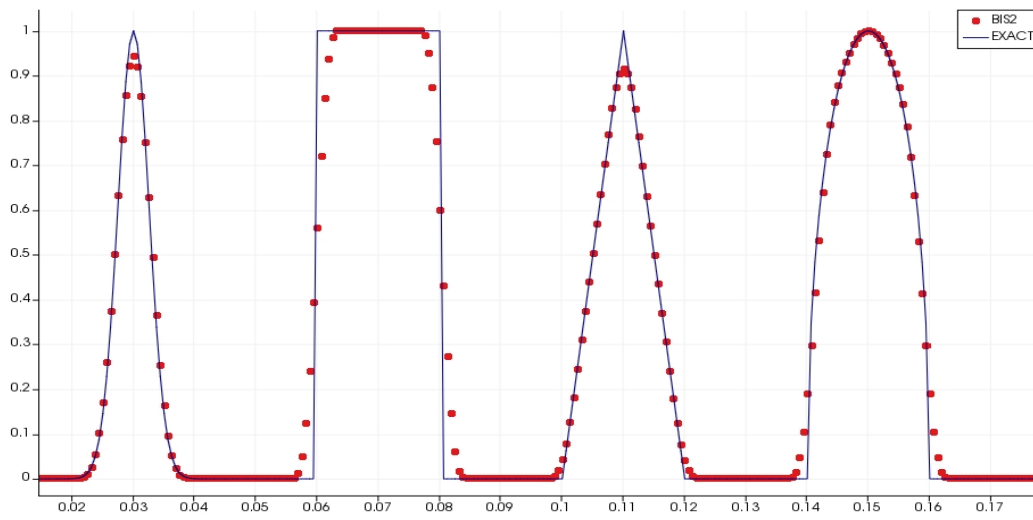


Рис. 11: БИС2

Видно, что схемы БИС показывают меньшие по сравнению со схемой СР осцилляции, при этом схема БИС2 дает более точное решение по сравнению со схемой БИС1, которая сильно "режет" решение около локальных экстремумов.

Порядок сходимости проверялся для таких же условий, но с другими начальными данными:

$$u(0, x) = \begin{cases} \sin^4 10\pi(x - 0.1), & 0.1 \leq x \leq 0.2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (27)$$

В таблицах ниже приведены ошибки и порядки сходимости для схем СР, БИС1, БИС2 для числа ячеек от 100 до 1600.

схема	N	t=7.5		t=75	
		L_1	порядок L_1	L_1	порядок L_1
СР	100	1 0.051691	–	0.079951	–
	200	1 0.041771	0.159103	0.079951	0.003317
	400	1 0.032484	0.236289	0.079675	0.004999
	800	1 0.023569	0.347205	0.077517	0.039612
	1600	1 0.015603	0.491967	0.072834	0.089893
СР	100	0.006377	1.664904	0.042279	0.473145
	200	0.0011061	2.527620	0.023796	0.829212
	400	0.000152	2.862303	0.008701	1.451423
	800	0.000019	2.985645	0.001715	2.343140
	1600	0.000002	2.999683	0.000237	2.852887
БИС1	100	0.012865	1.147183	0.039645	0.176806
	200	0.003244	1.987711	0.030201	0.392560
	400	0.000609	2.413508	0.015667	0.946817
	800	0.000129	2.236978	0.004220	1.892409
	1600	0.000025	2.374197	0.000810	2.381710
БИС2	100	0.007281	1.726947	0.040865	0.407953
	200	0.001122	2.698123	0.023632	0.790114
	400	0.000140	3.001723	0.008412	1.490237
	800	0.000018	2.955560	0.001528	2.460670
	1600	0.000002	2.971048	0.000205	2.896590

схема	N	t=7.5		t=75	
		L_∞	порядок L_∞	L_∞	порядок L_∞
CIP	100	0.118790	–	0.608567	–
	200	0.021721	2.451239	0.393653	0.628493
	400	0.002916	2.897033	0.163609	1.266670
	800	0.000369	2.982076	0.033677	2.280440
	1600	0.000046	2.996580	0.004570	2.881420
БИС1	100	0.421862	–	0.876393	–
	200	0.161299	1.387033	0.725525	0.272552
	400	0.053131	1.602126	0.459413	0.659234
	800	0.020078	1.403925	0.185397	1.309172
	1600	0.006715	1.580244	0.062607	1.566214
БИС2	100	0.653856	–	0.653856	–
	200	0.431958	2.456547	0.431958	0.598082
	400	0.180099	2.977048	0.180099	1.262099
	800	0.036736	3.103289	0.036736	2.293530
	1600	0.004936	3.085891	0.004936	2.895708

Профили точного решения (сплошная линия) и численного решения разными схемами в момент времени $T=0.1$:

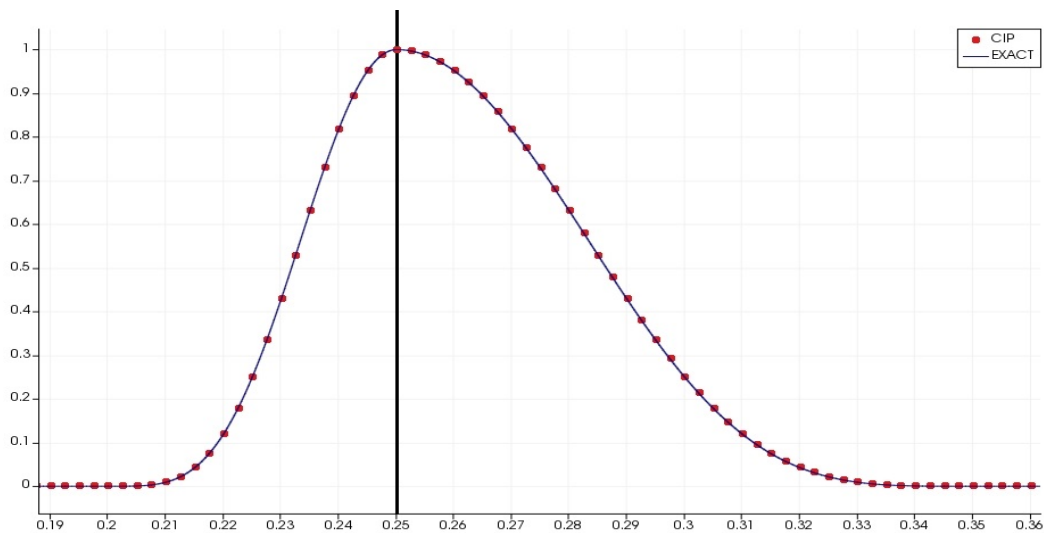


Рис. 12: CIP

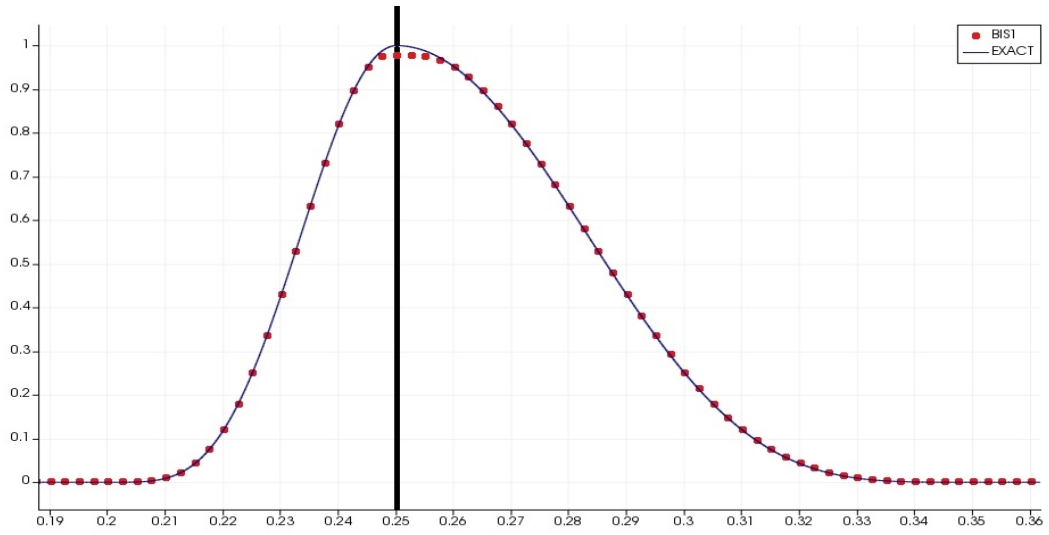


Рис. 13: БИС1

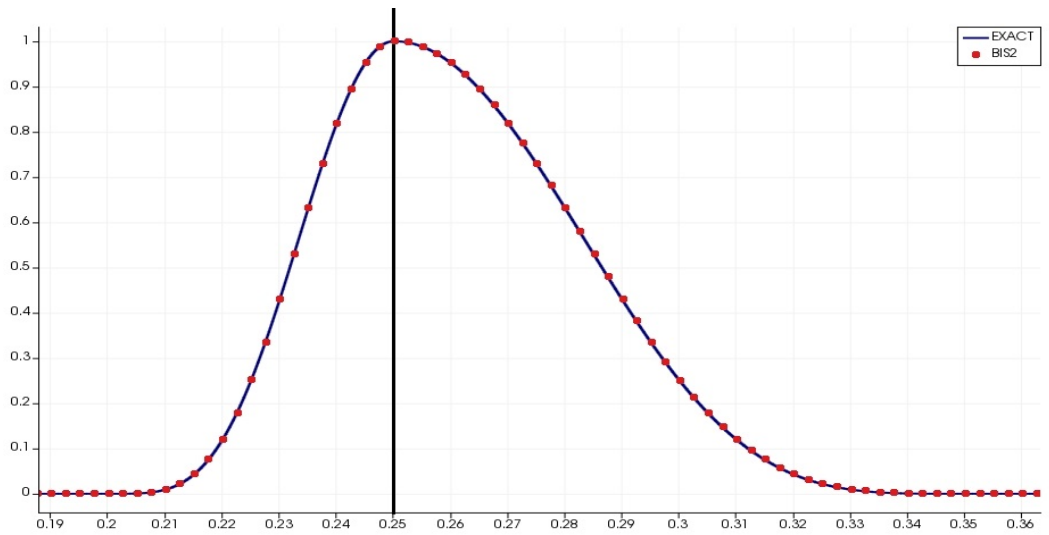


Рис. 14: БИС2

5.2 Уравнение акустики

Порядок сходимости решения для уравнения акустики проверялся на импульсе

$$\begin{aligned} p(0, x) &= \begin{cases} \sin^4 \frac{\pi}{2}(x+1), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ p_x(0, x) &= \begin{cases} 2\pi \sin^3 \frac{\pi}{2}(x+1) \cos \frac{\pi}{2}(x+1), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$u(0, x)$, $u_x(0, x)$ задавались таким образом, чтобы один из инвариантов Римана был равен в начальный момент нулю, таким образом, в среде с постоянным Z решение оказывалось аналогично решению для уравнения переноса со соответствующей скоростью [1]. Скорость принималась равной

$$c = \begin{cases} 1, & |x| < 3 \\ 2, & \text{иначе} \end{cases} \quad (29)$$

Время принималось равным 13, за это время волна успевала вернуться в первоначальное состояние. Также использовалось периодическое граничное условие. Порядки сходимости для различных норм:

схема	N	L_1	порядок L_1	L_∞	порядок L_∞
CIP	100	0.118790	–	0.608567	–
	200	0.021721	2.45	0.393653	0.63
	400	0.002916	2.90	0.163609	1.27
	800	0.000369	2.99	0.033677	2.28
	1600	0.000046	3.00	0.004570	2.88
BIS1	100	0.006148268	–	0.258130509	–
	200	0.001264652	2.28	0.087453942	1.56
	400	0.000258509	2.29	0.028789007	1.60
	800	0.000046496	2.48	0.009658743	1.58
	1600	0.000008989	2.37	0.003288367	1.55
BIS2	100	0.003813577	–	0.099252742	–
	200	0.000686035	2.47	0.027537115	1.85
	400	0.000077082	3.15	0.003753632	2.88
	800	0.000006670	3.53	0.000262020	3.84
	1600	0.000000729	3.19	0.000014909	4.13

Во втором тесте дополнительно был введён кусочно-постоянный импеданс:

$$z = \begin{cases} 2, & |x| < 3 \\ 3, & \text{иначе} \end{cases} \quad (30)$$

При переходе волны через границу раздела теперь возникает отраженная волна с интенсивностью, равной 0.2 от интенсивности исходной волны. Спустя время $T = 6.0$ после начала движения исходной волны отраженная волна успевает вернуться точно в начальное положение, таким образом и проверялся порядок сходимости. Полученные результаты:

схема	N	L_1	порядок L_1	L_∞	порядок L_∞
CIP	100	0.000551275	–	0.011433940	–
	200	0.000098827	2.48	0.002170132	2.40
	400	0.000017188	2.52	0.000387719	2.48
	800	0.000003185	2.43	0.000074754	2.37
	1600	0.000000658	2.28	0.000015799	2.24

6 Вывод

В данной работе был проведён обзор некоторых методов, используемых для решения гиперболических уравнений, было проанализировано поведение полиномов 3 порядка при интерполяции ими значений величин, был рассмотрен случай гетерогенных сред и проанализированы порядки сходимости. Дальнейшие направления работы:

1. Возможность получения более высоких порядков для схемы СР.
2. Анализ поведения схем БИС1 и БИС2 для уравнения акустики.
3. Перенесение алгоритма на многомерный случай.
4. Перенесение алгоритма на уравнение упругости.

Список литературы

- [1] Randall J. LeVeque (2012) Finite volume methods for hyperbolic problems Cambridge University Press, ISBN: 978-0-521-81087-6
- [2] Хохлов Н.И., Петров И. Б. (2015). О бикомпактных сеточно-характеристических схемах для линейного уравнения переноса. Доклады Академии наук 5 (2015) стр. 542.
- [3] Randall J. LeVeque (1999). Numerical Methods for Conservation Laws. 2nd Edition. Birkhauser Verlag P.O., Berlin, ISBN: 3-7643-2723-5.
- [4] Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. М.: 2010
- [5] Chaoming Zhang, Randall J. LeVeque. The immersed interface method for acoustic wave equations with discontinuous coefficients, Wave Motion 25 (1997), pp. 237-263.
- [6] Kazufumi Ito and Tomoya Takeuchi. Immersed Interface CIP for One Dimensional Hyperbolic Equations. Commun. Comput. Phys. Vol. 16 (2014), No. 1, pp. 96-114
- [7] K. Shiraishi and T. Matsuoka, Wave Propagation Simulation Using the CIP Method of Characteristic Equations, Communications in Computational Physics, 3 (2008), pp. 121-135
- [8] Masaki Tanigawa, Basic study on acoustic wave analysis by the multi-moment method using interpolation by a high-order polynomial, ICA 2010, pp. 1-6
- [9] Kaser, M., Dumbser, M. (2008). A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids. GEOPHYSICS, 73(3), T23–T35
- [10] Ketcheson, D. I., Mandli, K., Ahmadi, A. J., Alghamdi, A., de Luna, M. Q., Parsani, M., ... Emmett, M. (2012). PyClaw: Accessible, Extensible, Scalable Tools for Wave Propagation Problems. SIAM Journal on Scientific Computing.

- [11] Wilcox, L. C., Stadler, G., Burstedde, C., Ghattas, O. (2010). A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic–acoustic media. *Journal of Computational Physics*, 229(24), 9373–9396.
- [12] Aoki, T. (1991). A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation. *Computer Physics Communications*, 66, 233–24
- [13] Feng, R. (2012). High Order Cubic-Polynomial Interpolation Schemes on Triangular Meshes. *Communications in Computational Physics*, x(x), 1–15.
- [14] Ishizuka, T., Okubo, K. (2014). Three-dimensional wave-based simulation of outdoor sound propagation using the constrained interpolation profile method with a variable-grid technique. *Inter.noise 2014 in Melbourne Australia*, 1–7
- [15] Ito, K., Takeuchi, T. (2011). CIP methods for hyperbolic system with variable and discontinuous coefficient. *ArXiv E-Prints*, 19. Numerical Analysis.
- [16] Ito, K., Takeuchi, T. (2014). Immersed Interface CIP for One Dimensional Hyperbolic Equations. *Communications in Computational Physics*, 16(1), 96–114.
- [17] Matsumura, Y., Okubo, K., Tagawa, N., Tsuchiya, T., Ishizuka, T. (2014). Numerical Analysis of Sound Wave Propagation Using CIP-MOC Method with Non-Uniform Grid, 1–7
- [18] Yabe, T., Aoki, T., Sakaguchi, G., Wang, P., Ishikawa, T. (1991). The compact CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-particle) method as a general hyperbolic solver. *Computers and Fluids*, 19(3-4), 421–431.
- [19] Yabe, T., Mizoe, H., Takizawa, K., Moriki, H., Im, H.-N., Ogata, Y. (2004). Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme. *Journal of Computational Physics*, 194(1), 57–77.
- [20] Yabe, T., Xiao, F., Utsumi, T. (2001). The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis. *Journal of Computational Physics*, 169(2), 556–593.