Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра информатики

Разработка математических моделей оценки рисков на основе малых выборок экспертных оценок

Выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация)

Выполнил:
студент 073 группы ______________________ Капаев Евгений Олегович

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ______________________ Кадощук Игорь Тарасович

Рецензент
к.ф.-м.н., ______________________ Коньков Константин Алексеевич

Москва 2016

Содержание

Введение

В современном мире грамотное оценивание существующих угроз любой природы является необходимым для успешной деятельности организации. Под угрозой или риском обычно понимают некоторое событие, которое имеет ненулевую вероятность возникновения и может оказать влияние на результат деятельности. Поэтому для достижения поставленных задач необходимо вовремя идентифицировать потенциальные проблемы и грамотно оценивать последствия.

Процесс управления рисками является одним из важнейших процессов в любой организации, потому что от его грамотного контроля во многом зависит успешность деятельности организации. Для того чтобы управление было достаточно эффективным менеджеру необходимо принимать решения, основываясь на некоторых метриках риска, своего опыта и мнения экспертов.

Данная работа посвящена исследованию методов оценки рисков при помощи агрегации оценок риска, полученных от экспертов.

1. Постановка задачи

Основная цель работы - создание простого и корректного метода для оценки суммарного риска от нескольких идентифицированных угроз, при помощи агрегации небольшого количества экспертных оценок.

В этой работе исследуются известные способы оценки риска, проводится сравнение и предлагается метод, основанный на исследовании малых выборок. Наиболее простой метод оценки заключается в получении значения риска от эксперта, который основываясь на своих знаниях и опыте может определить величину потерь. Мнение одного человека зачастую оказывается недостаточно достоверным, более того оценить достоверность оценки эксперта не представляется возможным. Поэтому на практике обычно привлекают несколько человек, каждый из которых предоставляет свою оценку. Таким образом имея несколько оценок от экспертов, нужно получить агрегированную оценку, которая будет представлять собой некоторое коллективное мнение.

Как правило количество экспертов невелико(<10), поэтому использование обычных методов статистического анализа, основанных на проверке статистических гипотез о типе распределения выборки, будет давать некорректные результаты.

Из этого следует, что важно правильно обрабатывать оценки, полученные от экспертов, чтобы в итоге получить величину с изначально заданной достоверностью.

На практике эксперт дает предельные оценки: "Вероятность данного события от 60 до 80 процентов". В некоторых широкораспространненых методологиях управления проектами используются качественные оценки от экспертов, которые тем не менее могут быть сведены к интервальным оценкам. Кроме того, иногда в распоряжении менеджера имеются только точечные оценки от экспертов, которые по сути являются некоторым конечным множеством вещественных чисел. Можно рассматривать это множество как реализации некоторой случайной величины X с неизвестным распределением.

Менеджеру для принятия решений удобно иметь оценку в виде некоторого интервала с заданным уровнем доверия. Поэтому он должен заранее установить уровень достоверности оценки как величину от 0 до 1, который он ожидает получить в итоге. Чем ближе этот уровень к 1, тем ближе предполагаемый интервал к реалистичному.

2. Основные понятия

При разработке нового продукта в рамках проекта всегда приходится иметь дело с неопределенностью, потому что внешние условия всегда меняются и необходимо всегда просчитывать исходы, чтобы завершить проект успешно в рамках определенного бюджета и времени. Рассмотрим основные этапы управления рисками

2.1. Понятие риска

При определении понятия «риск» обычно отталкиваются от базового понятия «опасность». «Риск», т.е. мера актуализированной опасности, сам по себе никаким объектом не является. Это означает также и то, что риск не может ни самостоятельно функционировать, ни обладать каким–либо собственным результатом функционирования[2]. В связи с этим риск часто понимают как количественную меру опасности. При этом количественной мерой возможности наступления события является «вероятность». То есть понятию риск придается содержание, количественно выражаемое возможностью наступления неблагоприятного события в течение определенного периода времени, обычно во течение всего времени разработки проекта.

В большинстве научных работ под риском понимают не только вероятность наступления неблагоприятного события но и так называемый "размер наносимого ущерба". Величину ущербы обычно сводят к денежным потерям, что значительно помогает и упрощает принятие решений для менеджера проекта.

2.2. Процесс управления риском

Американский Институт Управления Проектами(PMI), который занимается систематизацией и публикацией стандартов в области управления проектами значительно переработал разделы, регламентирующие процедуры для корректного управления рисками. В данный момент подход описанный в PMBoK(Project Management Body of Knowledge)[1] наиболее полным описанием процессов управления проектами, в частности процесса управления рисками.

Процесс управления рисками проекта обычно включает выполнение следующих процедур

- **Планирование управления рисками** - определение подходов и организация деятельности по управлению рисками проекта

- **Идентификация и оценка рисков** - определение и оценка рисков способных повлиять на проект

- **Планирование реагирования на риск** - определение процедур и методов по уменьшению отрицательных последствий рисковых событий

- **Мониторинг и контроль рисков** - мониторинг рисков и выполнения плана управления рисками проекта и оценка эффективности действий по минимизации рисков

Все вышеперечисленные процедуры неразрывно связаны между собой. Остановимся поподробнее процессе оценки риска. Процесс оценки риска состоит из нескольких этапов:

- **Идентификация рисков** - определение негативных событий, которые могут оказать влияние на проект

- **Оценка потенциального ущерба** - определение величины потерь (времени, денег, человеческих ресурсов) для каждого из выше идентифицированных рисков

- **Оценка возможности реализации** - определение вероятности для каждого события риска
- **Получение оценки риска** - оценка как произведение ущерба на вероятность реализации
- **Получение итоговой оценки риска для всего проекта** - оценка как сумма величин рисков

3. Методы оценки риска

Для того чтобы эффективно управлять возможными потерями и с целью страхования потерь нам необходима количественная оценка риска. Это нужно, чтобы иметь возможность математически сравнить различные сценарии, основываясь на определенной метрике для каждого сценария, тем самым упрощая принятие управленческих решений. Для этого применяются несколько групп методов для оценки риска: статистические методы оценки риска и экспертные методы оценки риска

3.1. Статистические методы оценки риска

Основная идея статистических методов для оценки риска состоит в том, что величина потерь и вероятность рисковых событий основывается на статистических(исторических) данных. Можно выделить условия применимости статистических методов:

- Соответствие оцениваемого рискового события историческим событиям
- Наличие достаточно большого массива входных исторических данных

Первое условие говорит нам о том, что оцениваемое рисковое событие должно принадлежать к определенному классу рисковых событий происходивших в прошлом. Это наиболее общее описание этого условия. В некоторых частных случаях мы можем сказать, что оцениваемое рисковое событие и исторические данные являются реализациями некоторой случайной величины. В таких случаях задача оценки риска сводится к оценке математического ожидания по выборке.

Второе условие необходимо, чтобы иметь возможность применять статистические методы для оценки параметров случайной величины[3] Под достаточно большой выборкой обычно понимают выборку с количеством элементов $N > 30$. Это требование наложено с целью обоснования применения статистических критериев для оценки параметров распределения. Но как показано в [5], если $N \geq 3$ и $N < 30$, то статистические методы также могут быть применены, но для этого нужно избежать потери информации при обработке выборки. Это достигается тем, что каждую реализацию случайной величины необходимо рассматривать как центр распределения некоторой виртуальной выборки с соответствующими параметрами. Далее к получившемуся набору данных можно будет применить классические статистические методы анализа данных.

Рассмотрим подробнее основные статистические методы оценки риска

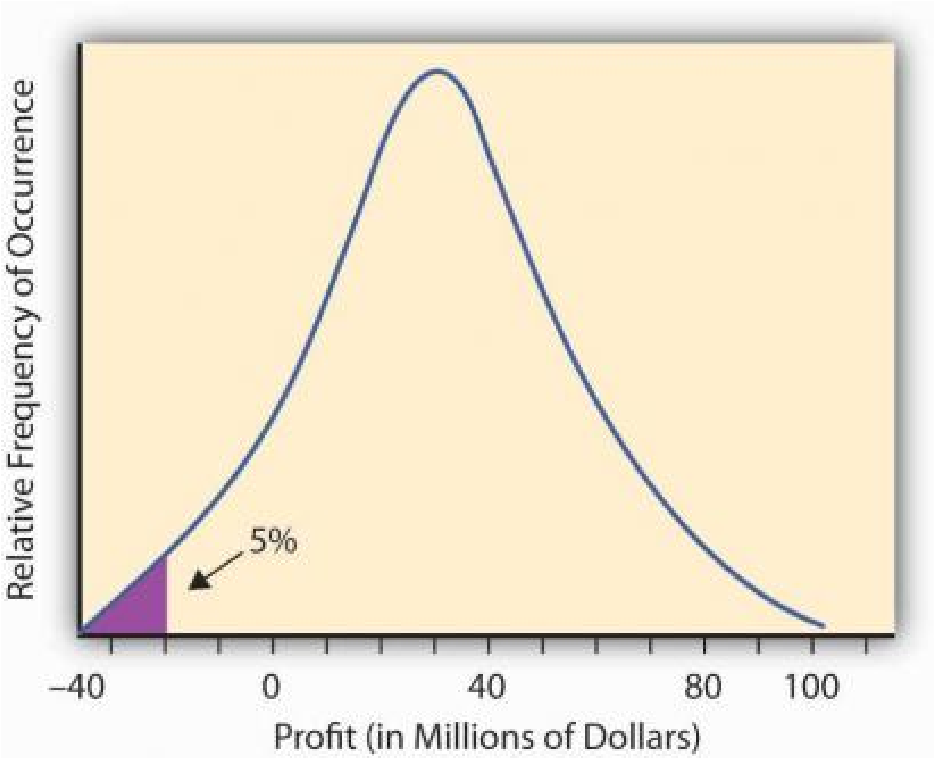
3.1.1. Мера риска (Value-at-risk)

Одним из наиболее известных и широкораспространненых методов для оценки рисков различной природы является методо определения меры риска или по-другому Value-at-risk(VaR)[4]. Мера риска представляет собой выраженную в денежных единицах оценку величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с изначально заданной вероятностью. VaR характеризуется двумя параметрами:

- **Временной горизонт**. Зависит от каждой конкретной ситуации. Применительно к оценке финансового рыночного риска по методологии RiskMetrics[6] - 1 день

- **Уровень доверия** - уровень допустимого риска. По методологии RiskMetrics обычно выбирается в 95%

VaR является величиной убытков, которая с вероятностью равной уровню доверия не будет превышена. Другими словами, вычисление величины VaR проводится с целью заключения утверждения: "Мы уверены на X% (с вероятностью X/100), что потери не превысят Y в течение следующих T дней".



Таким образом строгое определение VaR можно записать в следующем виде.

При заданном уровне доверия $\alpha \in (0;1)$, VaR_α есть наименьшее число l такое что, вероятность того, что потери L превысят l больше чем $(1-\alpha)$. Т.е.

$$VaR_\alpha = inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

Первое равенство представляет собой определение VaR. Второе, более частное, равенство можно понимать как запись через вероятностное распределение. Между первым и вторым не всегда можно поставить равенство, потому что F_L не всегда определена на выборке. Таким образом можно выделить два способа или подхода к вычислению величины риска:

параметрический и непараметрический[7] В первом случае предполагается, что исторические данные являются реализациями случайной величины с известным наперед распределением (обычно нормальным). Далее требуется оценить параметры распределения по выборке и исходя из этого определить VaR. Во втором способе мы не пытаемся определить тип распределения случайной величины. Исходя из определения VaR может быть вычислен как

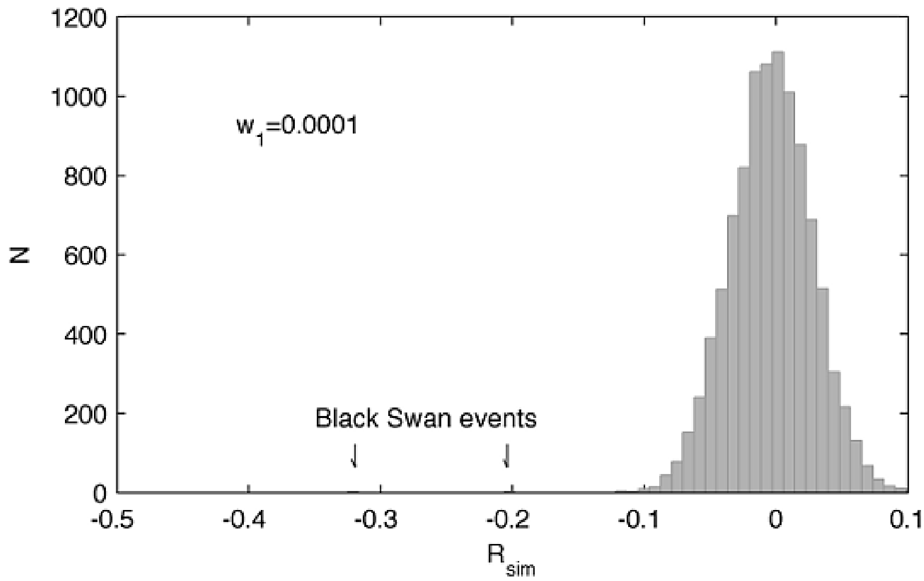
$$VaR_\alpha = l_{[n(1-\alpha)]+1,n}$$

где $l_{1,n} \geq \dots \geq l_{n,n}$ отсортированная выборка

Несмотря на всю простоту понимания и использования VaR имеет ряд существенных недостатков, что мешает использовать его на практике для оценки рисков в проектном управлении:

- Необходимость в большом объеме исторических данных. Зачастую на практике проектному менеджеру такая информация недоступна. Это связано с тем, что рисковые события для каждого проекта уникальны и таким образом будет некорректно опираться на статистику похожих рисковых событий в других проектах.

- Отсутствие в выборке информации об очень редких событиях. К сожалению, информация о том, что выборка является реализацией некоторой случайной величины не всегда оказывается полезной. Это связано с так называемым эффектом "черного лебедя"[8]: потери в при реализации маловероятного события могут быть несопоставимо огромными. Рассмотрим это на примере. Предположим, что мы каким-то образом оценили значение $VaR_\alpha = X$ при $\alpha = 99\%$, т.е. с вероятностью 99% величина потерь не превысит X. Но как быть с оставшимся 1%? Насколько или даже во сколько раз потери будут больше X. Если ущерб составит 100*X, то полученная нами оценка оказывается абсолютно бессмысленной. Получается, что само предположение о типе распределения по выборке оказывается неверным, если среди элементов выборки не присутствуют такие выбросы. Опыт мировых рынков показывает, что маловероятные события представляют собой наибольшую проблему для управления рисками.



3.1.2. Метод ожидаемых потерь(Expected Shorfall)

Для решения проблемы с маловероятных событий может быть введено значение ожидаемых потерь(Expected Shortfall)[4].

Эта величина равна математическому ожиданию величине ущерба в $(1-\alpha)$ случаях. Т.е.

$$ES_\alpha = E(L|L \geq VaR_\alpha(L))$$

Можно переписать это в следующем виде:

$$ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{E(L\mathbb{I}_{[q_\alpha(L),\infty]}(L))}{P(L \geq q_\alpha(L))}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}E(L\mathbb{I}_{[q_\alpha(L),\infty]}(L)) = \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{q_{\alpha(L)}}^{\infty} l dF_L(l),$$

где $\mathbb{I}_A$ индикаторная функция: $\mathbb{I}_A(x) = 1$ если $x \in A$ и 0 в противном случае. Это выражение верно для непрерывной функции распределения вероятностей, но также может быть переписано и для дискретного случая. Значение ES позволяет оценить потери в 1% случаях, но такой способ также не лишен недостатков. Для получения ES нам также как и в случае в VaR необходим доступ выборке исторических данных, кроме того здесь уже не обойтись малой выборкой. Такое ограничение связано с тем, при построении функции распределения по малой выборке, точки выборки будут лежать в области высоковероятных событий, а информация об маловероятных событиях будет интерпретирована некорректно. Получается, что для получения ES оценки нам необходимо знать тип распределения, а по выборке только определять его параметры. Таким образом получаем еще одно ограничение на применимость этого метода.

В итоге мы приходим в выводу, что статистические методы оценки риска не могут быть эффективно использованы для оценки проектного риска. Для грамотной интерпретации результатов технического анализа можно воспользоваться опытом экспертов.

3.2. Методы экспертных оценок

Основные недостатки статистических методов можно исправить при помощи экспертов. Эксперт - это опытный специалист, который приглашается на проект для выдачи квалифицированного заключения или суждения по вопросу, рассматриваемому или решаемому другими людьми, менее компетентными в этой области. Применительно к нашей задаче мы хотим получить от эксперта оценку величины риска с некоторой заранее заданной достоверностью или, что лучше, некоторое распределение для этой оценки, потому первое может быть получено из второго.

Мы предполагаем, что у нас есть набор идентифицированных возможных рисковых событий и менеджер проекту необходима некоторая достаточно достоверная метрика для всего портфеля рисков. Для каждого события мы можем оценить величину ущерба(функцию потерь) и вероятность этого события. Эти оценки мы и получаем от эксперта. Обычно мнение одного эксперта недостаточно достоверно, поэтому лучше использовать нескольких экспертов и для оценки ущерба и для оценки вероятности рискового события. С этой целью применяются различные методы агрегации оценок, которые рассмотрены ниже.

Методы получения экспертной оценки можно условно разделить на две группы:

- Методы коллективной работы экспертной группы
- Методы обработки индивидуальных оценок

В первой группе методов предполагается, что команда экспертов выносит общее решение в результате некоторого обсуждения. Обсуждение может быть организовано различными способами, например, в *методе "круглого стола"* группы экспертов обсуждают ту или иную проблему с целью согласования точек зрения и выработки единого мнения. В *методе* *голосования*, каждый эксперт должен высказать свое мнение относительно заранее определенной группы альтернатив; наиболее популярный вариант среди группы экспертов признается результатом работы экспертной группы.

Методы коллективной работы экспертной не подходят для решения поставленной нами задачи по нескольким причинам. В первую очередь, это связано с так называемым человеческим фактором. Более опытный эксперт в группе может может оказаться не убедительным в своей точке зрения, тем самым группа экспертов может пойти по ложному пути и выдать недостоверный результат. Метод голосования предполагает, что эксперты выбирают их конечного числа альтернатив, что сильно ограничивает область применения данного метода. Например, в поставленной нами задаче предполагается, что оценка является некоторым вещественным числом, интервалом на вещественной оси или вероятностным распределением с вещественными параметрами, что никак не позволяет воспользоваться методом голосования.

Методы индивидуальных оценок в этом плане предоставляют нам гораздо более гибкие инструменты для принятия решения.

Рассмотрим их подробнее

3.2.1. Метод Дельфи

Суть этого метода в том, чтобы с помощью серии последовательных операций — интервью, опросов, мозговых штурмов — добиться максимального консенсуса при определении правильного решения. Анализ с помощью дельфийского метода проводится в несколько этапов, результаты обрабатываются статистическими методами.

Основным принципом метода является то, что группа независимых экспертов(обычно несвязанных и не знающих друг о друге) лучше оценивает и предсказывает результат, чем специально подобранная экспертная группа Позволяет избежать открытых столкновений между носителями противоположных позиций, так как исключает непосредственный контакт экспертов между собой и, следовательно, групповое влияние, возникающее при совместной работе и состоящее в приспособлении к мнению большинства, даёт возможность проводить опрос экстерриториально, не собирая экспертов в одном месте (например, посредством электронной почты) Основные этапы

- постановка проблемы — экспертам рассылается вопрос и предлагается его разбить на подвопросы. Организационная группа отбирает наиболее часто встречающиеся. Появляется общий опросник.

- этот опросник рассылается экспертам. Их спрашивают — можно ли добавить ещё что-то; достаточно ли информации; есть ли дополнительная информация по вопросу? В итоге получаем 20 вариантов ответов с дополнительными аспектами и информацией. На основе этого составляется следующий опросник.

- улучшенный опросник вновь рассылается экспертам, которым теперь надо дать свой вариант решения, а также рассмотреть наиболее крайние точки зрения, высказанные другими экспертами. Эксперты должны оценить проблему по аспектам: эффективность, обеспеченность ресурсами, в какой степени соответствует изначальной постановке задачи. Таким образом выявляются преобладающие суждения экспертов, сближаются их точки зрения. Всех экспертов знакомят с доводами тех, чьи суждения сильно выбиваются из общего русла. После этого все эксперты могут менять мнение, а процедура повторяется.

- операции повторяются, пока не будет достигнута согласованность между экспертами, или не будет установлено отсутствие единого мнения по проблеме. Изучение причин расхождений в оценках экспертов позволяет выявить незамеченные ранее аспекты проблемы и зафиксировать внимание на вероятных последствиях развития анализируемой проблемы или ситуации. В соответствии с этим и вырабатывается окончательная оценка и практические рекомендации. Обычно проводится три этапа, но если мнения сильно разнятся — то больше.

Недостатки метода Дельфи:

- беззащитность эксперта перед организационной группой — слишком большие полномочия.
- мнение большинства — не обязательно правильное; креативное решение — меньшинства, наиболее эффективные решения — отбрасываются.
- анализ — много времени. Минимум на каждый этап — сутки. Не подходит для оперативного анализа.
- возрастает конформизм экспертов — стремление попасть в большинство.
- возможность манипуляции экспертами организационной группой.

С целью нейтрализации этих недостатков были предложены улучшения:

- подбор организационной группы из различных структур, научных и социальных школ,
- ту же проблему прогнать через другую группу,
- самые оригинальные решения можно включать в качестве дополнений.

Также имеется ряд технических ограничений:

- время проведения зависит от средств коммуникации экспертов.

- опрашиваемые должны уметь хорошо излагать свои мысли, так как данный метод основан на получении информации в письменной форме, в противном случае обработка затрудняется

- анкетируемые должны обладать высоким уровнем мотивации, так как отсутствует поощрение за заполнение анкет.

3.2.2. Метод агрегации невероятностных оценок через параметры распределения

Предположим, что эксперт в качестве ответа на запрос возвращает нам не одно число, а некоторое распределение оценок. Эксперт должен выбрать тип значения вероятности распределения из следующих типов[9]:

- **Нормальное распределение** N

- **Треугольное распределение** T, эксперт полагает, что вероятность распределения симметричная, одномодальная, и вероятность увеличивается приблизительно однородно от края к моде

- **Трапециевидное распределение** Tr, — объединение треугольного и равномерного распределения; эксперт ожидает, что некоторый интервал (MI) с наибольшей вероятностью существует внутри RI;

- **Равномерное распределение** E, у всех предполагаемых вариантов равная вероятность.

Далее, в поисках наилучшей возможной оценки менеджер проекта получает оценку $C = L * P$, где L и P некоторые экспертные оценки в виде распределения. Например, при оценке длительности проекта возникает задача определить длительность работ в человеко-часах. Для вычисления C нужно

- Определить средние значения и дисперсии для каждого распределения

- Определить среднее значение произведения C как произведение средних значений

- Определить дисперсию произведения как:

$$D_c = D_v D_w + M_V^2 D_W + M_W^2 D_V$$

- Определить предполагаемые границы интервала произведения C как $M_c \pm z\sigma$, где z - это нормированное отклонение

Далее для получения оценки всего портфеля нужно сложить получившиеся оценки. В случае независимых событий нужно:

- Определить тип распределения и оценки границ для заданного уровня доверия

- Вычислить средние значения и дисперсии

- Вычислить сумму средних значений и сумму дисперсий

- Вычислить границы предполагаемого интервала

Очевидно, что перемножении неопределенность возрастает, достоверность уменьшается, а точность метода падает. Чтобы уменьшить количество умножений в алгоритме можно сначала получить общие оценки L и P по всем идентифицированным рискам как суммы $L = \Sigma_N L_i$ и $P = \Sigma_N P_i$, а затем перемножить. Как показано в [9] второй способ дает гораздо более достоверный результат.

Несмотря на все ощутимые преимущества над статистическими методами оценки, у такого подхода есть ряд недостатков:

- Если одна из оценок в произведении это некоторая вероятность или вероятностное распределение, то для получения общей оценки мы можем использовать только первый способ(сначала произведения, потом сумма). Таким образом количество произведений в алгоритме возрастает, и как следствие общая неопределенность и достоверность падает

- Эксперт не всегда может точно определить тип распределения. Выбор типа распределения предполагает, что эксперту в качестве оценки нужно предоставить несколько чисел - параметров распределения. Для равномерного, треугольного и нормального это 3 числа, для трапецевидного 4. Каждое это число уже несет в себе некоторую дополнительную ошибку, поэтому общее увеличение входных параметров крайне нежелательно.

- Оценка каждого риска в этом методе представлено распределением от одного эксперта, что увеличивает недостоверность итогового результата. Ошибка одного человека может быть может быть слишком велика и может существенно исказить итоговую оценку

3.2.3. Метод агрегации оценок для вероятности

В 2012 году Erin Baker и Olaitan Olaleye в своей статье [10] сравнили два метода для оценки вероятности рисковых событий.

Предположим, что у нас есть набор независимых рисков(рисковых событий) $\iota \in [1; N]$. Нас интересует величина равная произведению вероятности события на величину ожидаемых потерь. К примеру, событие ι это "это устройство выдержит нагрузку с вероятностью 95 процентов", а событие ι' - "ущерб от поломки уст4ройства составит 100 у.е.". Тогда нас интересует вероятность $p_{ii'} = p_i * p_{i'}$. Другими словами вероятность p это полная вероятность событий ι и ι'.

Эти рисковые события оцениваются некоторым количеством экспертов, $j \in [1; K]$. Оценку события i экспертом j можно записать в следующем виде:

$$q_{ij} = pi + \varepsilon_{ij} + \mu_{ij}$$

Т.е. представить в виде суммы достоверной вероятности p_i (в предположении что все сообщество экспертов не ошибается), ε_{ij} - некоторая общая ошибка, которую совершают эксперты при оценке i-го события, μ_{ij} некоторая ошибка которую привносит в оценку эксперт j. Другими словами, ε_{ij} коррелирует с $\varepsilon_{ij'}$, не независима по отношению к $\varepsilon_{i'j}$, а μ_{ij} коррелирует с $\mu_{i'j}$, но не зависима по отношению к $\mu_{ij'}$

В первом методе агрегации (Метод 1) мы усредняем индивидуальные оценки вероятности для каждого события, а затем получаем общую оценку вероятности для события $p_{ii'} = p_i * p_{i'}$; или мы можем оценить вероятность произведения оценок от каждого эксперта, а затем получить итоговую оценку вероятности (Метод 2).

Рассмотрим подробнее **метод 1**. Усредненную оценку вероятности для каждого события i можно вычислить следующим образом:

$$q_i^{(n)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$$

где n - количество экспертов. Тогда итоговую вероятность можно записать в виде:

$$q_i^{(n)} \equiv \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \sum_{j=1}^{n} q_{i'j} =$$
$$(p_i + \varepsilon_i^{(n)} + \mu_i^{(n)} + \delta_i^{(n)})(p_i + \varepsilon_{i'}^{(n)} + \mu_{i'}^{(n)} + \delta_{i'}^{(n)})$$

Если обозначить ρ это корреляция между μ_{ij} и $\mu_{i'j}$, а σ^2 дисперсия μ_{ij}, тогда мат ожидание можно записать в виде(см. [10], appendix A.1):

$$E[q_{ii'}^{(n)}] = p_i p_{i'} + \frac{\rho\sigma^2}{n}$$

В **методе 2** мы вычисляем вероятность произведения для каждого эксперта, а затем усредняем по всем экспертам. Вероятность произведения можно записать в виде

$$\tilde{q}_{ii'}^{(n)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} q_{i'j}$$

Мат. ожидание:

$$E[q_{ii'}^{(n)}] = p_i p_{i'} + \rho\sigma^2$$

Можно увидеть, что абсолютное значение ожидаемой ошибки во втором случае систематически больше, чем в первом и, кроме того, оно не зависит от количества экспертов. В [10] также доказано, что дисперсия ошибки в первом методе так же меньше. Таким образом, мы убедились, что первый метод позволяет точнее решить поставленную задачу.

3.3. Резюме

Изложенные выше методы имеют как преимущества так и недостатки. Основной задачей перед менеджером проекта является выбор соответствующего метода для решения задачи. Существующие методы подходят для некоторого, довольно узкого набора частных случаев.

К уже было сказано, основным недостаткам статистических методов, является необходимость в исторических данных для построения математической модели. Однако, если данные все таки имеются, то можно использовать математический аппарат для вычисления меры риска(VaR) и ожидаемых потерь(Expected loss). Для принятия управленческих решений при оценке риска в большинстве случаев этих применение метрик является достаточным.

Если же исторические данные недоступны, то единственный способ оценить некоторую неопределенную величину это экспертные оценки. Вышеизложенные методы, тем не менее, имеют ряд ограничений и недостатков:

- **Неопределённость в представлении мнения эксперта**. Оценка от одного эксперта в форме одного вещественного числа недостаточно точна, а для построения некоторого доверительного интервала нужно прибегать к историческим данным. Оценка в виде также является недостаточно достоверной, поскольку возможны систематические ошибки при оценке интервала.

- **Математический аппарат для перемножения оценок**. В методе агрегации через параметры распределения оценки(3.2.2) перемножение производится при через моменты случайной величины, что не совсем корректно. В итоге получается некоторый интервал, для математического ожидания результирующей случайной величин, поэтому в итоге мы не можем получить оценку для некоторого заранее заданного уровня доверия. Действительно, если задать уровень $\gamma = 1$, то на выходе алгоритма получаем некоторый доверительный интервал для мат.ожидания $[a, b]$, но реальный доверительный интервал оказывается шире, так как возможны исходы за границами данного интервала. Можно сказать, что при перемножении таким образом мы теряем часть информации от эксперта, потому что игнорируем поведение функции распределения на границах интервала. Это приводит нас к так называемой проблеме моментов, которая говорит о невозможности решения в общем случае задачи о построении функции плотности распределения по заданным моментам распределения(математического ожидания и дисперсии)[11]. В некоторых частных случаях имеется возможность однозначно определить функцию по моментам, но для этого необходимо накладывать дополнительные ограничения на функцию плотности распределения. Получается, что при переходе от распределений к их моментам мы теряем информацию и соответственно накапливаем ошибку.

- **Сложность вида экспертной оценки**. Требование от эксперта оценки в виде вероятностного распределения трудно применимо на практике, потому что требует дополнительных затрат для выбора типа распределения. Кроме того, это требование может приводить к еще одному виду ошибок, связанному с тем что эксперт вносит некоторую дополнительную, "искусственную" информацию в оценку, что привести оценку к одному из четырех ожидаемых распределений.

4. Описание метода

4.1. Постановка задачи

Изложенные выше недостатки существующих методов, приводят нас к следующей задаче. Для заданного набора рисковых событий $i_1 \dots i_n$ имеются экспертные оценки двух видов: $l_{i1} \dots l_{iK}$ - оценки K экспертов о величине ущерба при возникновении данного события и $p_{i1} \dots p_{iM}$ - оценки M экспертов о вероятности рискового события. Требуется для заданного уровня доверия α получить агрегированную оценку величины риска как произведение $EL_i = L_i * P_i$, где L_i - некоторая усредненная оценка ожидаемых потерь, P_i - вероятность этого события. Будем считать, что оценки l_{ik} и p_{im} являются некоторыми вещественными числами, и потребуем, чтобы EL_i было представлено в виде некоторой функции распределения.

4.2. Получение агрегированной оценки величины ущерба

Предположим, что у нас есть некоторая выборка $l_{i1} \dots l_{iN}$ оценок от экспертов i-го рискового события. Будем искать агрегированную оценку в форме некоторой функции плотности распределения. Восстановление теоретической модели распределения вероятностей, которой соответствуют выборочные данные — представляет собой основную задачу математической статистики. Если закон распределения, которому соответствует выборка был бы известен, никаких бы трудностей с получением оценок параметров, а также их доверительных интервалов не возникало. Однако, такая ситуация практически невозможна в данной задаче. Вместе с тем, ситуации, когда закон распределений известен лишь отчасти, например, исходя из каких-либо априорных сведений о природе данных, вполне распространены. В этом случае, как правило, предполагается, что закон распределения описывается функцией (или плотностью) распределения определенного вида, зависящей от одного или нескольких параметров. Если это так, то основная задача статистики сводится к получению наиболее точных оценок этих неизвестных параметров. Таким образом, имеет место параметрическая задача оценки (функции плотности) распределения.

Если же характер распределения, которому принадлежат выборочные данные достаточно сложен, а априорные сведения о нем отсутствуют, то для решения этой задачи можно использовать два подхода: использовать достаточно общие модели распределений, зависящие от параметров, или непараметрические методы оценки распределений.

Непараметрические методы являются более общими, чем параметрические, потому что не используют априорную информацию о функциональном виде восстанавливаемого теоретического распределения. Дополнительное знание, пусть даже некоторой общей информации о типе распределения, то можно сказать что параметрические методы обладают большей точностью, если априорные предположения о виде распределения верны.

В нашей задаче будем считать, что априорных знаний о типе распределения оценок у нас нет, поэтому будем использовать непараметрические методы. Будем также предполагать, что количество экспертов невелико. Так как информация, заложенная в малой выборке, ограничена, то для повышения эффективности оценивания необходимо привлекать дополнительную информацию, которая содержится в априорных данных о случайной величине. В качестве таких данных может выступать:

- интервал (a, b) изменения X, т.е. $x : x \in (a, b)$
- характеристики случайной величины такие как мат. ожидание m_x, и дисперсия σ_x
- класс распределения с точностью до неизвестного параметра θ

В нашей задаче мы можем заранее определить некоторый интервал изменения случайной величины, потому что мы оцениваем реальные величины, которые имеют некоторые физические ограничения. Например, ущерб не может быть отрицательным или больше некоторого достаточно разумного значения. Моменты случайной величины и класс распределения нам обычно неизвестно. Запишем оцениваемую функцию плотности распределения в следующем виде:

$$f(x) = f_0(x) + f_N^*(x) \tag{4.2.1}$$

где $f_0(x)$ априорная компонента и $f_N^*(x)$ эмпирическая компонента, построенная по выборке экспертных оценок.

4.2.1. Эмпирическая плотность распределения

Будем искать состоятельную, несмещенную и эффективную оценку плотности распределения. Для построения искомой функции воспользуемся теоремой о том, что любую кусочно-непрерывную функцию $f(x)$ на интервале U действительной оси R можно представить в виде:

$$f(x) = \int_U f(\xi)\delta(x, \xi)d\xi \tag{4.2.2}$$

$$\delta(x, \xi) = \lim_{n\to\infty} D_n(x, \xi) \tag{4.2.3}$$

где $\delta(x, \xi)$ - дельта функция в точке ξ; $\delta(x, \xi)$ - дельтообразная последовательность данной точки ξ являющейся центром интервала длиной 2ξ

Дельтообразная последовательность функций может использоваться для аппроксимации кусочно-непрерывной функции:

$$f(x) \approx f^*(x) = \int_U f(\xi)D_n(x, \xi)d\xi \tag{4.2.4}$$

Если функция $D_n(x,\xi)$ непрерывна по аргументам x и ξ, то функция $f^*(x)$ является непрерывной и

$$\lim_{n\to\infty} f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_U f(\xi) D_n(x,\xi) d\xi = f(x) \tag{4.2.5}$$

Заменим дискретный параметр n на непрерывный $\rho \geq 0$ и будем рассматривать дельтообразную функцию трех переменных $D(\rho,x,\xi)$, для которой справедливо соотношение:

$$\delta(x,\xi) = \lim_{n\to\infty} D(\rho,x,\xi) \tag{4.2.6}$$

Примером подходящей дельтообразной функции может служить функция определяемая выражением:

$$D(\rho,x,\xi) = C(\rho) exp[-\frac{1}{2p^2}(x-\xi)^2] \tag{4.2.7}$$

Из условия нормировки для $D(\rho,x,\xi)$ получаем:

$$C(\rho) = \left(\rho \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{1}{2}t^2 dt]\right)^{-1} \tag{4.2.8}$$

Аппроксимацию кусочно-непрерывной функции $f(x)$ можно осуществить конечным рядом функций $D(\rho,x,\xi)$. Для этого определим значения $f(x)$ в точке $\xi = x_i$ с окрестностью Δx. В соответствии с 4.2.5 для $x \in [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}]]$ получаем:

$$f(x) \approx f^*(x) = f(\xi) D(\rho,x,\xi) \Delta\xi \tag{4.2.9}$$

Обозначим $f(x_i)\Delta x = \Delta\mu_i$, тогда итоговое выражение для аппроксимации можно записать в виде:

$$f_N^* = \sum_{i=1}^{N} f^*(x_i) = \sum_{i=1}^{N} D(\rho,x,\xi) \Delta\mu_i \tag{4.2.10}$$

При этом

$$f_N^* \equiv 0, x \notin [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}], i = 1,2,\ldots,N \tag{4.2.11}$$

Будем считать, что если искомая плотность распределения вероятностей $f(x)$ - хотя бы кусочно-непрерывная на интервале U, то формально для построения $f_N^*(x)$ по реализациям x_i можно использовать выражение 4.2.11.

Таким образом, оценка $f_N^*(x)$ может быть представлена как линейная сумма дельтообразных функций $D(\rho, x, \xi)$, определенных на реализациях x_i случайной величины, каждая из которых представляет собой "элементарную" δ-плотность в некоторой окрестности x_i. В [5] показано что в качестве ρ можно принять $\frac{\Delta x}{2}$, т.е. в качестве непрерывного параметра ρ дельтообразной функции принимается половина интервала ее области определения. Тогда обозначая $\Delta\mu_i = \mu_i$ и $D(\rho, x, \xi) = C(\rho)\psi_i(\rho, x)$, получаем эмпирическую оценку плотности в следующем виде:

$$f_N^*(x) = C(\rho) \sum_{i=1}^{N} \mu_i \psi_i(\rho, x) \tag{4.2.12}$$

Из условия нормировки для функции плотности распределения получаем:

$$C(\rho) = \left(\int_{-\rho}^{\rho} \psi_i(\rho, x) dx \right)^{-1} \tag{4.2.13}$$

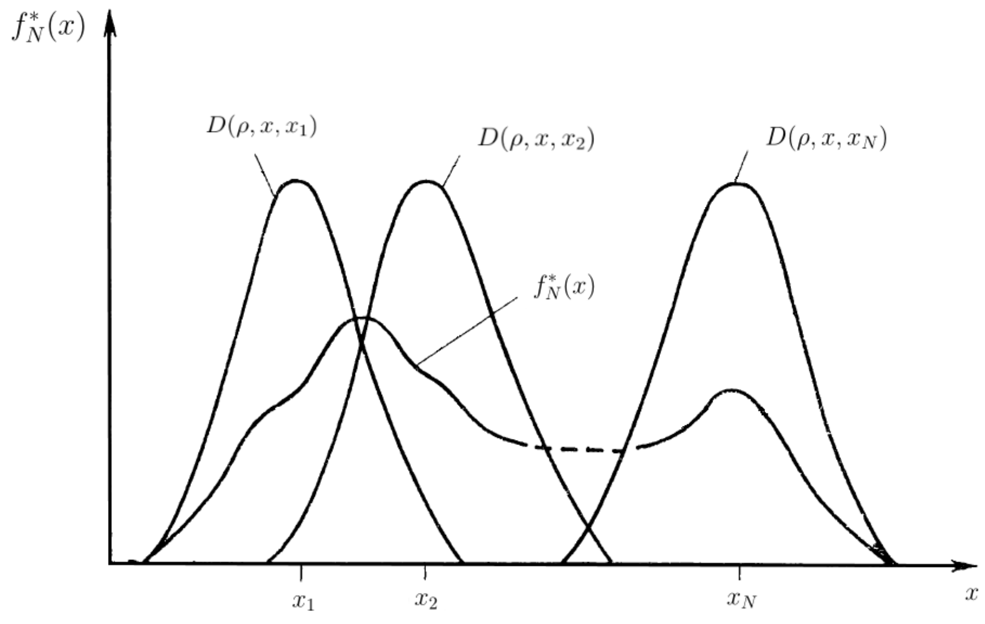


Рис.1 Эмпирическая плотность распределения

Рассмотрим получение эмпирической функции плотности распределения на конкретном примере. Пусть в результате экспертного оценивания получены оценки от трех экспертов: 8,0; 8,2; 8,8. Оценим эмпирическую плотность, описывающую агрегированное мнение экспертов. Положим, $\mu_i = 1/N = 1/3$, $\rho = 0.4$, а ядро:

$$\psi_i(\rho, x) = \begin{cases} 1, x \in (x_i - \rho; x_i + \rho) \\ 0, x \notin (x_i - \rho; x_i + \rho) \end{cases} \tag{4.2.14}$$

Тогда по формуле 4.2.13 :

$$C(\rho) = \left(\int\limits_{-0{,}4}^{0{,}4} \psi_i(\rho, x) dx \right)^{-1} = \frac{1}{0,8} = 1,25 \tag{4.2.15}$$

Просуммировав ядра $\psi_i(\rho, x)$ для всех i, с амплитудами 1,25 и весами 1/3, получаем:

$$f_N^*(x) = \begin{cases} 0,41,\ x \in (7,6; 7,8) \\ 0,83,\ x \in (7,8; 8,6) \\ 0,41,\ x \in (8,6; 9,2) \end{cases} \tag{4.2.16}$$

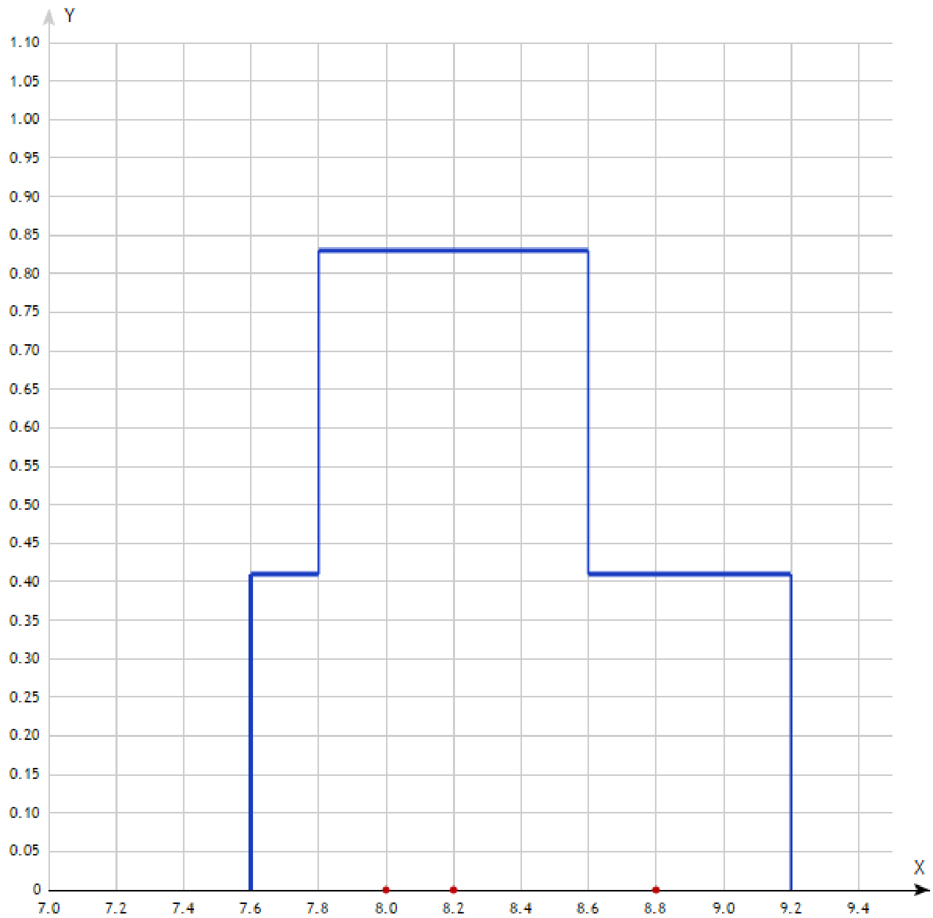


Рис.2 Итоговая эмпирическая плотность распределения

Нетрудно убедиться, что для построенной функции достаточно хорошо выполняется условие нормировки.

4.2.2. Полная оценка

При наличии априорной информации мы можем улучшить получившуюся эмпирическую оценку. Для этого нужно понять как априорная информация влияет на итоговый результат. Будем считать, что чем больше у нас точек в выборке, тем больше вклад эмпирической оценки в итоговую, т.е. при бесконечном увеличении N, вклад апориорной компоненты стремится к нулю. Тогда итоговую оценку можно переписать в виде:

$$f^*(x) = \alpha f_0(x) + (1-\alpha) f_N^*(x), \tag{4.2.17}$$

где $\alpha = \frac{1}{N+1}$ Случай, когда $\alpha = 0$ соответствует полному отсутствию априорных данных, что имеет место при традиционном подходе к анализу выборок.

Предположим, что нам известен интервал изменения итоговой величины ущерба (a, b). Тогда в качестве априорной компоненты оценки можно рассматривать функцию равномерного распределения:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a, b) \\ 0, x \notin (a, b) \end{cases} \tag{4.2.18}$$

Рассмотрим теперь получение итоговой оценки на примере. Предположим, что у нас есть оценки от трех экспертов: 8,0; 8,2; 8,8 и достоверно известно, что интервал изменения ущерба [6,0; 10,0]. Если рассматривать практические ситуации, то верхний и нижний пределы интервала могут, например, описывать минимальные и максимальные размеры штрафов, формально закрепленных в законодательных актах.

Примем, что $\mu = 1/N = 1/3$, $\alpha = 1/(N+1) = 1/4$, а $\rho = \frac{1}{N+2}(b-a) = 0,8$. Априорную компоненту находим по формуле 4.2.18:

$$f_0(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{10-6} = 0,25; x \in (6,0; 10,0) \tag{4.2.19}$$

Теперь строим $f_N^*(x)$. Вычисляем амплитуду $C(\rho)$ по формуле 4.2.13:

$$C(\rho) = \left(\int\limits_{-0,8}^{0,8} \psi_i(\rho, x) dx \right)^{-1} = \frac{1}{1,6} = 0,625 \tag{4.2.20}$$

Тогда эмпирическая плотность распределения принимает следующий вид:

$$f_N^*(x) = \begin{cases} 0,21,\ x \in (7,2; 7,4) \\ 0,42,\ x \in (7,4; 8,0) \\ 0,63,\ x \in (8,0; 8,8) \\ 0,42,\ x \in (8,8; 9,0) \\ 0,21,\ x \in (9,0; 9,6) \end{cases} \tag{4.2.21}$$

Вычисляя полную оценку по формуле 4.2.17 получаем:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0,06, \ x \in (6,0; 7,2) \\ 0,22, \ x \in (7,2; 7,4) \\ 0,38, \ x \in (7,4; 8,0) \\ 0,54, \ x \in (8,0; 8,8) \\ 0,38, \ x \in (8,8; 9,0) \\ 0,22, \ x \in (9,0; 9,6) \\ 0,06, \ x \in (9,6; 10.0) \end{cases} \tag{4.2.22}$$

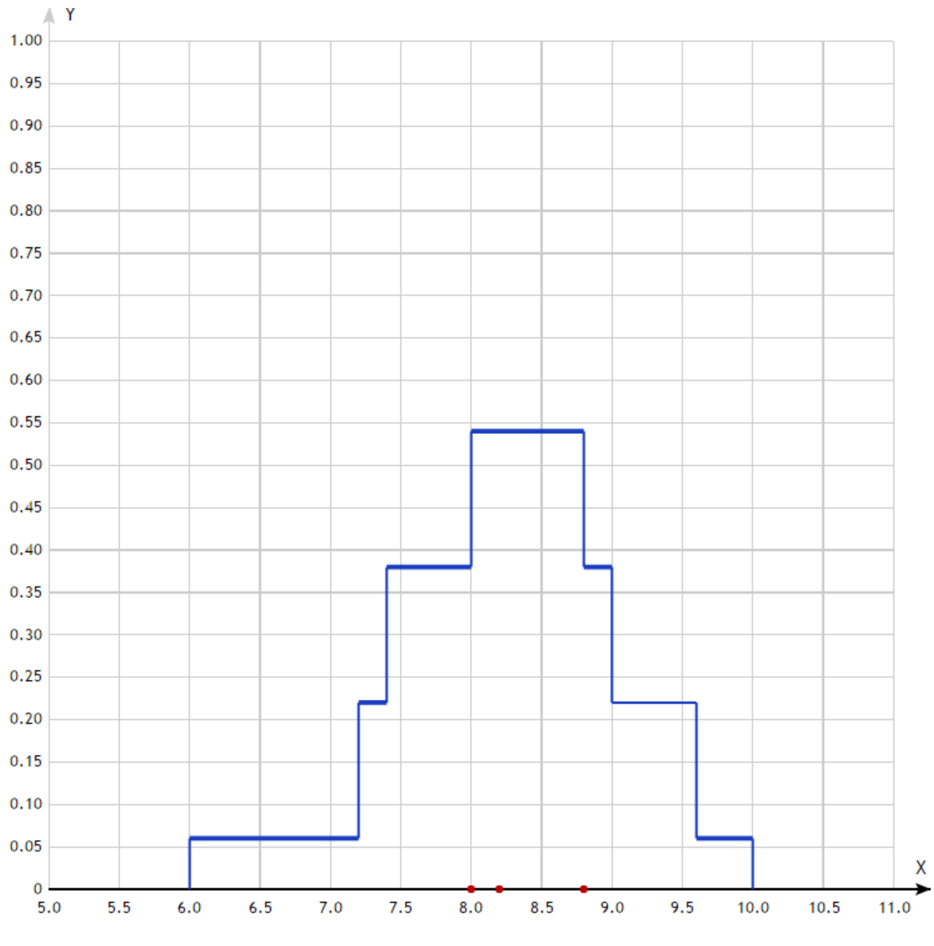


Рис.3 Итоговая плотность распределения

Легко проверить, что построенная плотность распределения с достаточной точностью удовлетворяет условию нормировки.

Таким образом, мы построили плотность распределения по выборке с тремя экспертными оценками, представленными всего одним числовым параметром, но с учетом, однако, некоторых априорных знаний о ширине оцениваемого интервала.

Если нам неизвестен априорный интервал изменения случайной величины, то для его построения можно воспользоваться правилом трех сигм [14], что позволит построить более качественную оценку (с точки зрения попадания наблюдений в реальный интервал). Т.е. для построения интервала нужно определить выборочную дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad (4.2.23)$$

где $\bar{X}$ - выборочное среднее. Тогда интервал для левой границы интервала можно принять значение $\bar{X} - 3\sigma$, а правой $\bar{X} + 3\sigma$.

К недостатку вышеизложенного метода можно отнести неопределенность с параметром ρ, т.е. шириной области определения дельта функции. В [5] проведено статистическое исследования с целью определения оптимального значения параметра, но только для некоторых известных типов распределений(нормального, экспоненциального). Если не вводить тип распределения, то можно наложить на параметр ряд ограничений. Понятно, что параметр ρ зависит от области определения функции, поэтому можно переписать его в виде $\rho = (b-a)\rho_m$. Тогда:

- $\rho_m \leq |x_1 - a|$
- $\lim_{N\to\infty} \rho_m = 0$

В примере 2 использовалась функция $\rho_m = 1/(N+2)$. Такой выбор позволяет разделить интервал (a,b) на N+2 интервала, что помогает в группировке близких друг к другу оценок. Другими словами, если у экспертов схожее мнение, то при таком разбиении оценки с большей вероятностью попадут в один интервал разбиения. В самом худшем случае мы можем получить равномерное распределение точек, когда каждая оценка вносит вклад только в свой интервал. Но даже в этом случае получается распределение с явновыраженной модой(см. рис 4).

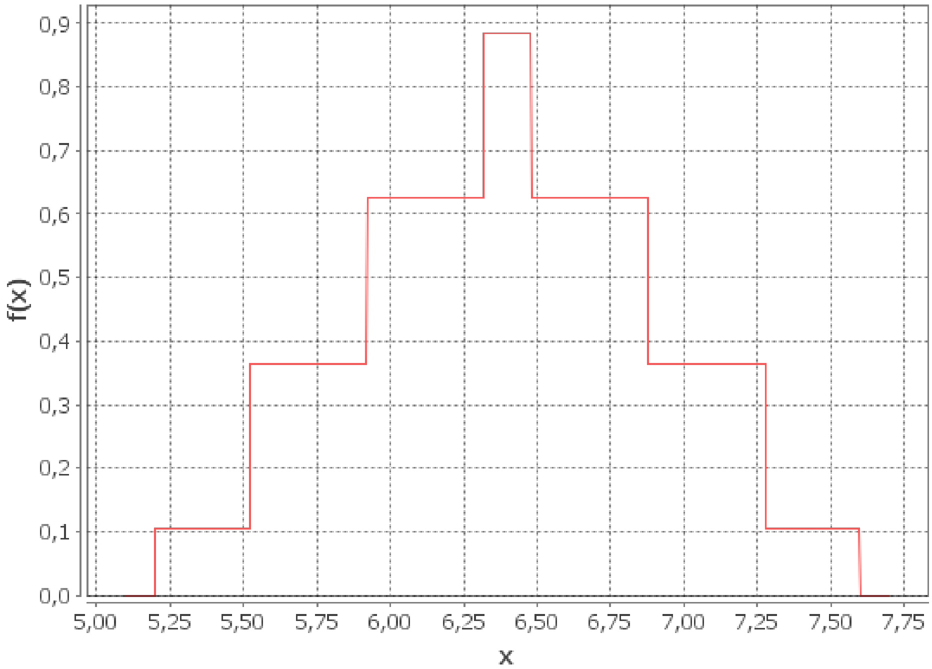


Рис.4 Плотность распределения для оценок 6.0, 6.4, 6.8

Если же имеется группа близких друг к другу оценок, то на некотором интервале плотность будет существенно выше(см. рис 5):

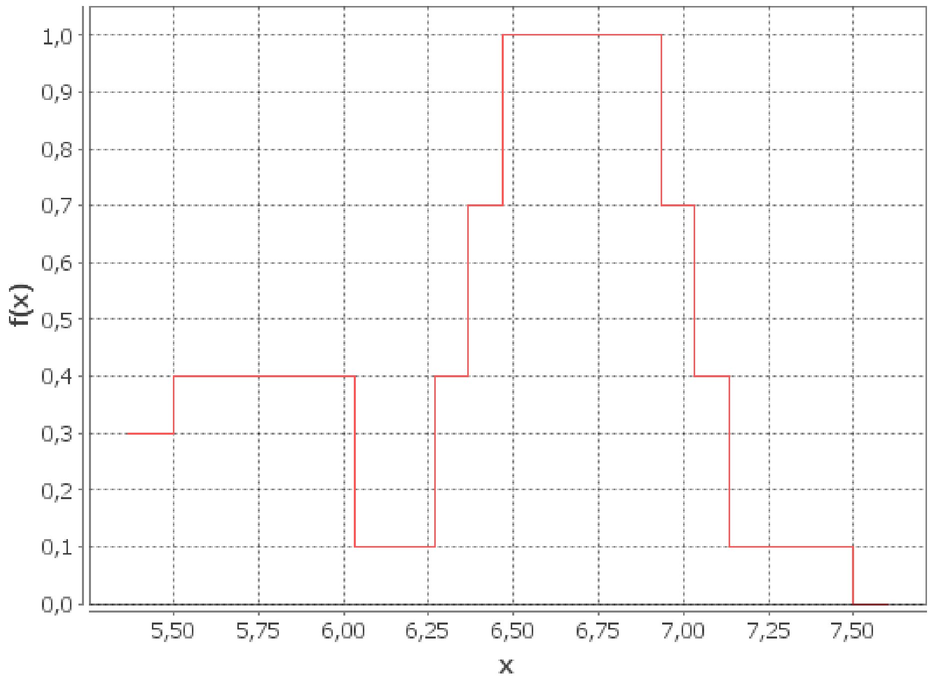


Рис.5 Плотность распределения для оценок 5.7, 6.6, 6.7, 6.8

4.3. Получение агрегированного значения риска

Вернемся теперь к исходной задаче(см. 4.1). Мы получили оценку для L_i как плотности распределения некоторой случайной величины, характеризующей оценки экспертов о величине ожидаемого ущерба рискового события i. Таким же способом может быть получена и оценка для P_i, однако это не единственный способ. Плотность распределения для P_i может быть выражена, например, через распределение Пуассона, как количество рисковых событий произошедших за определенный временной промежуток t. Таким образом величина EL_i покажет ожидаемую величину потерь за время t. Нужно учитывать, что подобная информация не всегда доступна и известна, поэтому для оценки величины P_i можно воспользоваться предложенным выше методом экспертных оценок.

Теперь остается получить итоговую оценку EL_i. Будем исходить из предположения, что L и P случайные величины с известными распределениями. Будем искать величину EL через плотность распределения произведения двух случайных величин. Для нахождения этой оценки существуют несколько способов:

- Аналитический метод
- Метод Монте-Карло

4.3.1. Аналитический метод

Рассмотрим аналитический способ получения функции плотности распределения. Если имеются две случайные величины X и Y с определяемыми плотностями распределения f_x и f_y, то плотность произведения $Z = XY$, можно найти по формуле:

$$f_z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z/x) \frac{1}{|x|} dx \tag{4.3.24}$$

В нашей задаче мы работаем кусочно-заданными функциями плотности распределения. Такую функцию можно переписать в виде:

$$f(x) = f_{a_1,b_1}(x) + f_{a_1,b_1}(x) + \dots + f_{a_n,b_n}(x) \tag{4.3.25}$$

$$f_{a_i,b_i}(x) = \begin{cases} r_x^i,\ x \in (a_x^i; b_x^i) \\ 0,\ x \notin (a_x^i; b_x^i) \end{cases} \tag{4.3.26}$$

Тогда выражение 4.3.24 примет вид:

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \sum_{i=1}^{n_x} r_x^i \int\limits_{a_x^i}^{b_x^i} f_y(z/x)\frac{1}{|x|}dx = \sum_{i=1}^{n_x} r_x^i \left[\int\limits_{a_x^i}^{b_x^i} \sum_{j=1}^{n_y} r_y^j \frac{1}{|x|}dx \Bigg|_{z\in(a_y^i x, b_y^i x)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n_x} \left[r_x^i \sum_{j=1}^{n_y} r_y^j ln[\frac{b_x^i}{a_x^i}] \Bigg|_{z\in\Delta_x^i * \Delta_y^j} \right] = \sum_{i=1}^{n_x} \left[r_x^i ln[\frac{b_x^i}{a_x^i}] \sum_{j=1}^{n_y} r_y^j \Bigg|_{z\in\Delta_x^i * \Delta_y^j} \right] \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

где $\Delta_x^i * \Delta_y^j$ - декартово произведение интервалов $(a_x^i; b_x^i)$ и $(a_y^j; b_y^j)$.

Если предположить, что одна из случайных величин имеет распределение Пуассона ($f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{\Gamma(x)}$) с параметром λ, тогда выражение 4.3.24 можно переписать в следующем виде:

$$f_z(z) = \sum_{i=1}^{n_x} r_x^i \int\limits_{a_x^i}^{b_x^i} f_y(z/x)\frac{1}{|x|}dx = \sum_{i=1}^{n_x} r_x^i \int\limits_{a_x^i}^{b_x^i} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{\Gamma(x)}\frac{1}{|x|}dx = \tag{4.3.28}$$

Чтобы вычислить интеграл из 4.3.28, нужно использовать числовые методы, что увеличивает трудоемкость задачи.

4.3.2. Метод Монте-Карло

Для того чтобы избежать вычисления сложных интегралов при нахождении функции плотности распределения по формуле 4.3.24, можно воспользоваться числовыми методами, а в частности методом Монте-Карло.

Так как мы знаем плотности распределения случайных величин X и Y, то можем сгенерировать сколь угодно большую выборку для каждой из них, затем выполнить попарное перемножение и построить плотность распределения произведения по результирующей выборке.

Для кусочно-непрерывного распределения будем генерировать выборку следующим образом. Предположим, что размер выборки равен $N = 10^6$. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала (a_i, b_i) равна

$$p_i(x) = \int\limits_{a_i}^{b_i} f_{a_i,b_i}(x)dx = r_i(b_i - a_i) \tag{4.3.29}$$

Таким образом, чтобы получить выборку с заданной плотностью распределения 4.3.25, для каждого интервала (a_i, b_i) нужно с помощью генератора псевдослучайных чисел получить $n_i = p_i N$ чисел.В итоге получится репрезентативная выборка из N элементов.

Далее нужно получить выборку такого же размера для случайной величины Y и произвести попарное перемножение.

4.4. Программная реализация

Для реализации предложенного алгоритма была написана программа, которая принимает на вход оценки, а на выходе строит графики для эмпирических плотностей распределения и для плотности произведения.

Например, предположим что заданы оценки от экспертов величины ущерба 7.6,7.7, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8 и вероятности рискового события: 0.55, 0.60, 0.84, 0.86, 0.87, 0.90.

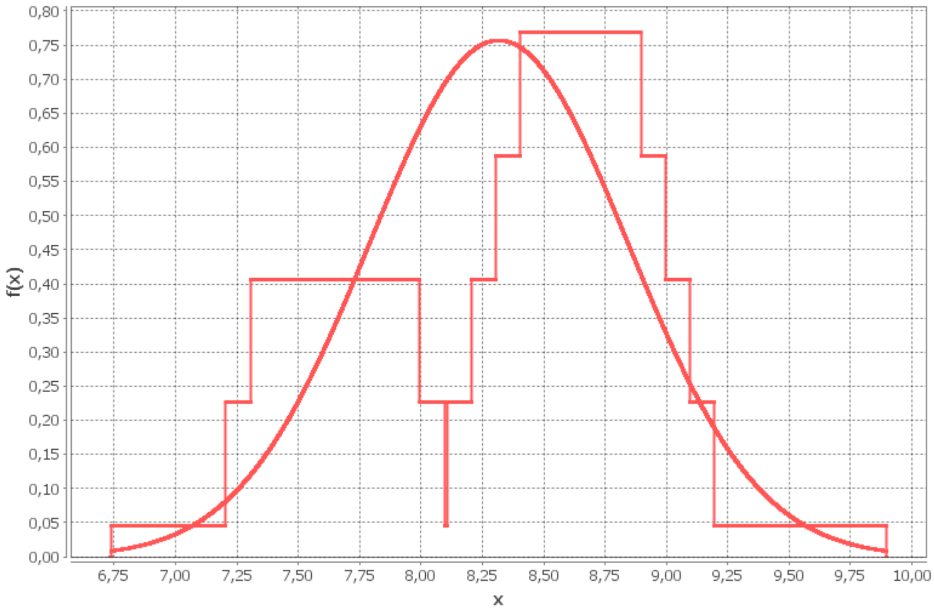


Рис. 1 Оценка плотности распределения ущерба

Оценка для плотности распределения ущерба представлена на рисунке 1. На этом же графике построена плотность нормального распределения по выборочному среднему и выборочной дисперсии. Видно, что если имеется явное разделение мнений(многомодальность), то оценка при помощи гауссианы не является корректной.

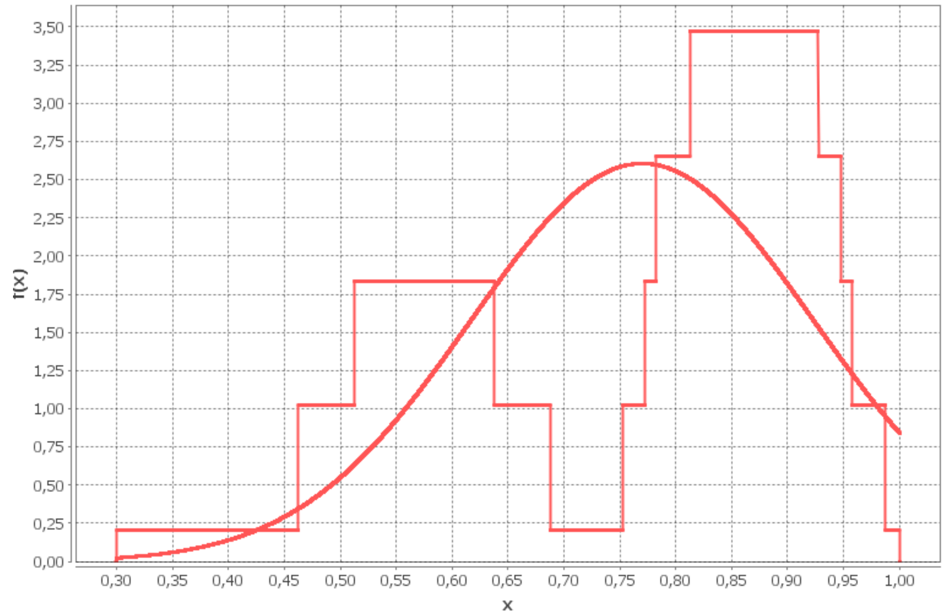


Рис. 2 Оценка плотности распределения вероятности

Если предположить, что и для оценки вероятности имеется некоторое разделение мнений(рисунок 2), то построенная оценка будет существенно отличаться от нормального распределения

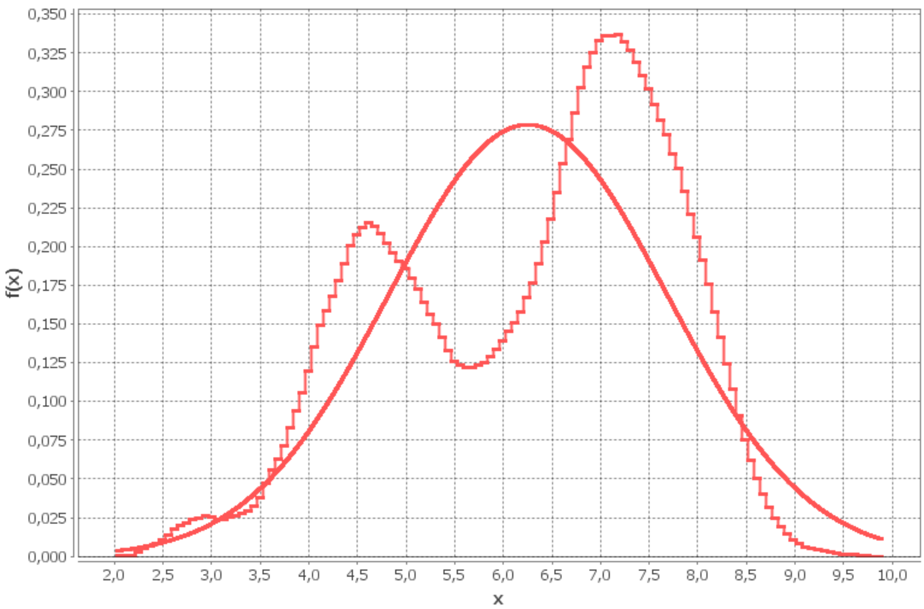


Рис. 3 Агрегированная оценка

Построенную оценку плотности, можно использовать, например, для получения доверительных интервалов. В 3.2.2 предлагается строить доверительный интервал для математического ожидания, где левая и правая границы интервала вычисляются как $M - 3\sigma$ и $M + 3\sigma$

соответственно, следуя правилу трех сигм [14]. Если оценки заданы через вещественные числа, для вычисления математического ожидания можно воспользоваться выборочным средним:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.4.30}$$

. Такая оценка является состоятельной при $n \to \infty$. Если же количество оценок невелико, то выборочное среднее, даже при известном типе распределения, может существенно отличаться от математического ожидания.

Выборочная дисперсия также не может являться точной оценкой, потому как при вычислении используется выборочное среднее:

$$\bar{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{4.4.31}$$

Для построения оценок для математического ожидания и дисперсии, лучше воспользоваться их формальными определениями:

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx \tag{4.4.32}$$

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f_x(x) dx \tag{4.4.33}$$

Докажем, что построенная агрегированная оценка является более точной, чем оценка через выборочное среднее. Для этого проведем численный эксперимент. Будем генерировать выборки различного размера и вычислять математическое ожидание и дисперсию при помощи формул 4.4.30, 4.4.31 и 4.4.32, 4.4.33. Далее вычисляем ошибку в сравнении с истинным значением момента случайной величины. Эксперимент нужно провести достаточно большое число раз и затем усреднить полученную ошибку. Результаты представлены в таблице 1.

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\bar{M}$	0.135	0.116	0.103	0.095	0.087	0.082	0.077	0.072	0.069	0.066	0.064
$\tilde{M}$	0.102	0.093	0.086	0.081	0.077	0.073	0.070	0.066	0.064	0.062	0.059
$\bar{D}$	0.100	0.077	0.063	0.054	0.048	0.044	0.040	0.037	0.035	0.033	0.032
$\tilde{D}$	0.048	0459	0.042	0.040	0.037	0.036	0.034	0.033	0.031	0.030	0.029

Table 1. Сравнение оценок для математического ожидания

Видно, что при уменьшении элементов в выборке оценка для математического ожидания и для дисперсии точнее, чем при построении через выборочное средние. Более того предложенный метод, позволяет получить состоятельные оценки, потому как при неограниченном увеличении размера выборки, оценка для матожидания и дисперсии сходится к истинному. На рисунке 4 и 5 показано, насколько ошибка выборочного среднего больше ошибки при построении через функцию распределения.

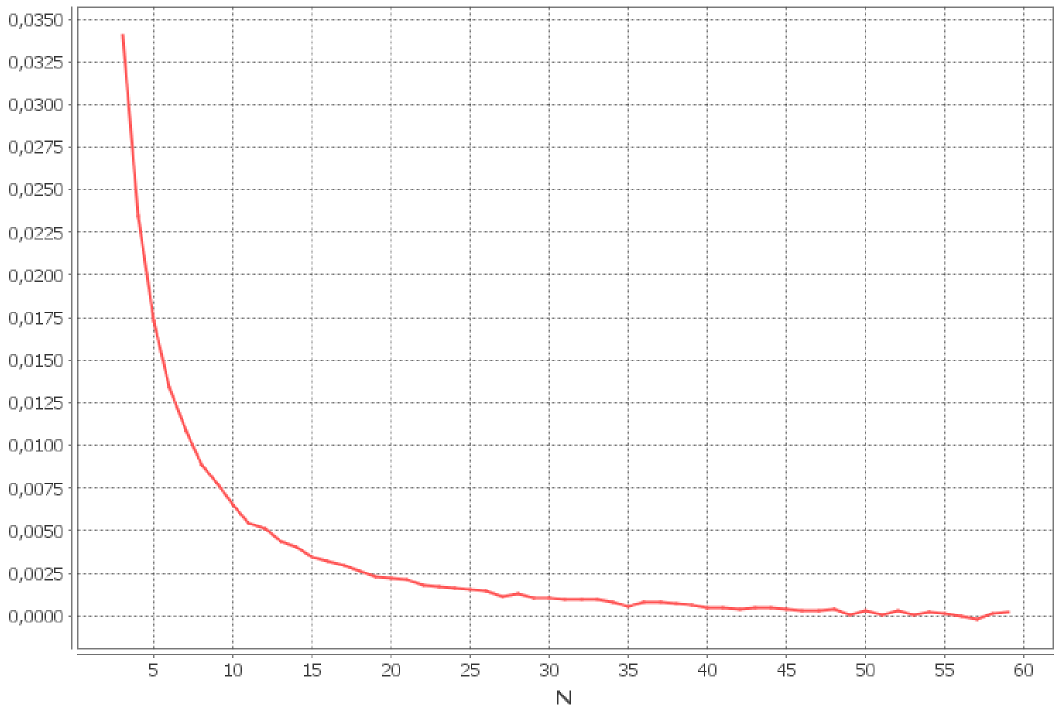


Рис. 4 Функция разницы ошибок для мат. ожидания

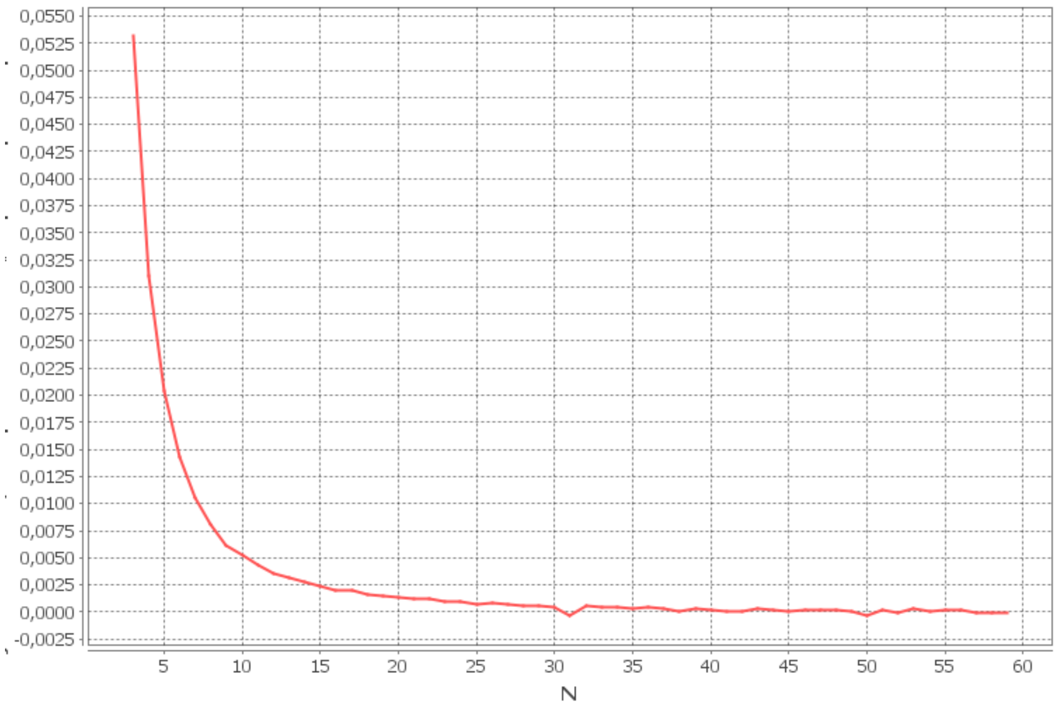


Рис. 5 Функция разницы ошибок для дисперсии

Можно также построить сравнительный график ошибки двух методов для математического ожидания и дисперсии(рисунок 6,7):

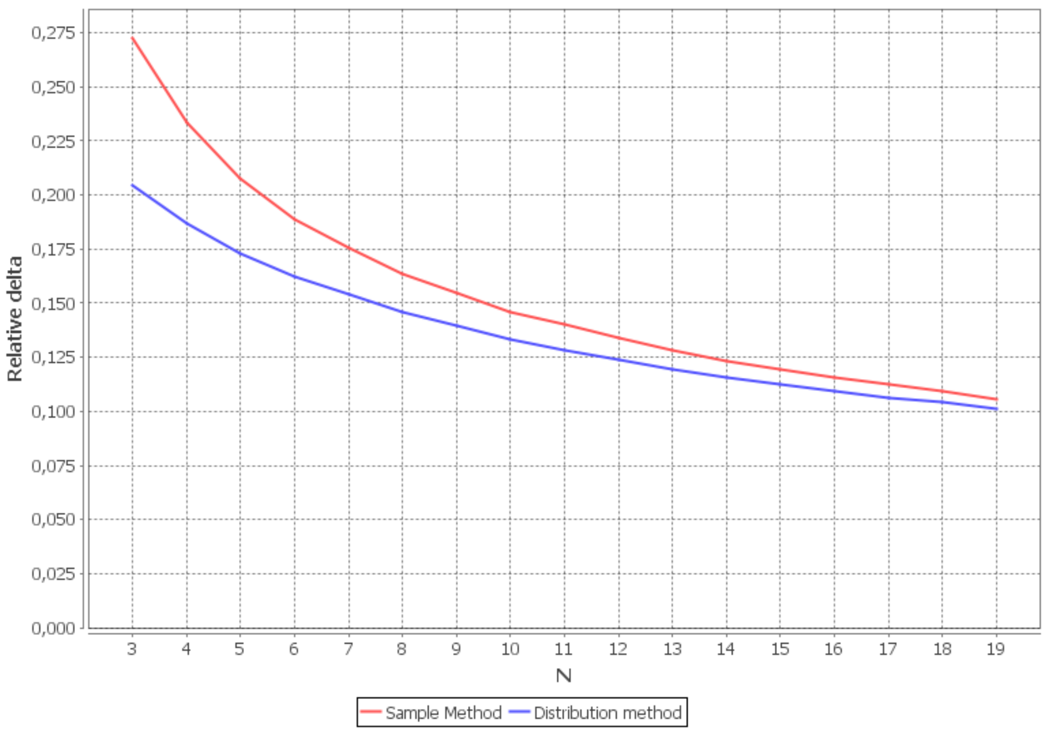


Рис. 6 Сравнение ошибок для мат. ожидания

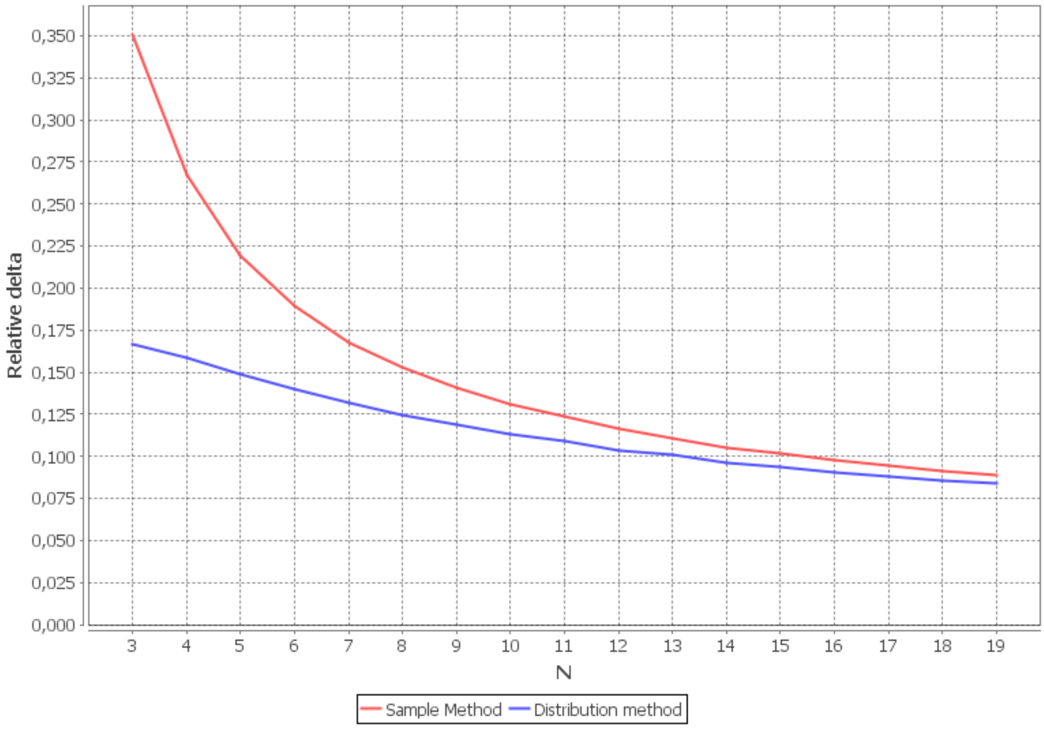


Рис. 7 Сравнение ошибок для дисперсии

На графиках 6,7 синяя линия иллюстрирует ошибку для предложенного метода, красная для оценки через выборочное параметры. Видно, что оценка построенная через плотность распределения является более устойчивой при уменьшении N и для математического ожидания и для дисперсии, причем для второго момента различие довольно существенное.

5. Заключение

В работе предложен метод, который позволяет по небольшому количеству экспертных оценок получить величину агрегированного ущерба или риска. Основные преимущества данного метода:

- Метод находит оценку на основе малой выборки в среднем лучше, чем оценка через выборочные параметры

- Метод позволяет учитывать априорную информацию

- Метод "распознает" моды в выборке

- Метод работает без предположений о типе распределения

Кроме того, в изложенном методе имеются дополнительные возможности для оптимизации:

- Функция ядра в 4.2.10 может быть выбрана оптимальным образом в зависимости от количества элементов, параметров ρ и α. Однако для этого необходимо делать предположения о типе распределения. Ядро прямоугольной формы может быть интерпретировано как априорная оценка от эксперта как интервал изменения оцениваемой величины.

- Параметры ρ и α также могут быть подобраны при помощи вычислительного эксперимента для выборок из различных типов распределений

Такие оптимизации позволят получить еще более точную оценку, несмотря на то, что предложенный алгоритм показывает результаты лучше, чем оценка, полученная при помощи параметрического метода.

Список литературы

1. *A Guide to the Project Management Body of Knowledge: PMBOK(R) Guide 5th Edition.* by Project Management Institute, ISBN-13: 860-1200917796

2. Белов П., Гражданкин К *Менеджмент техногенного риска.* Стандарты и качество, 2004

3. Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А *Математическая статистика: Учебное пособие.* – М.: МЗ Пресс – М.: МФТИ, 2004

4. Henrik Hult and Filip Lindskog., *Mathematical Modeling and Statistical Methods for Risk Management* - Lecture Notes, 2007

5. Гаскаров Д.В. Шаповалов В. И., *Малая выборка* - М.: Статистика, 1987

6. Peter Zangari, *RiskMetrics Technical Document*, 1996

7. Natalia Markovich, *Nonparametric analysis of univariate heavy-tailed data*, 2007

8. Taleb, Nassim Nicholas, *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable.* New York: Random House, 2007

9. Савраева В. О. , Кадощук И. Т., *Процедуры агрегирования при управлении рисками и планировании проектов*, Московский физико-технический институт (государственный университет), факультет управления и прикладной математики

10. Erin Baker, Olaitan Olaleye, *Combining Experts: Decomposition and Aggregation Order*, 2012

11. Ахиезер Н.И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматлит, 1961

12. Р.М. Юсупов, Г. Б. Петухов; *Статистические методы обработки результатов наблюдений*, МО, 1984

13. Springer, Melvin Dale; Thompson, W. E. *The distribution of products of independent random variables*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 1966

14. Орлов А. И. *«Шесть сигм» – система внедрения контроллинга и его эконометрических инструментов*, Контроллинг, 2005