

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра информатики и вычислительной математики

## ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА НА ОСНОВЕ ОТКРЫТЫХ ПАКЕТОВ

Выпускная квалификационная работа

Выполнил:

студент 273(в) группы

Лунев Сергей Вадимович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.,

Хохлов Николай Игоревич

Москва 2016

# Оглавление

1 Введение .....	3
2 Методы решения уравнений Максвелла .....	4
2.1 FDTD .....	4
2.2 FIT .....	6
2.3 FEM .....	7
2.4 PSSD .....	8
3 Обзор открытых пакетов .....	10
3.1 EMTL .....	10
3.2 MEER .....	13
4 Заключение .....	15
Список литературы .....	16

# Глава 1

## Введение

С развитием вычислительной техники появилась возможность решать многие задачи электродинамики численными методами, которые позволяют определить распределение электромагнитного поля при заданных начальных и граничных условиях, используя алгоритмы, основанные на уравнениях Максвелла. В данной работе проводится обзор некоторых из таких методов решения, рассматриваются открытые пакеты, позволяющие решать широкий спектр задач моделирования электромагнитных систем. Также целью является верификация программного обеспечения, разрабатываемого на кафедре информатики, и написание тестовых примеров.

## Глава 2

# Методы решения уравнений Максвелла

## 2.1 FDTD

Метод конечных разностей во временной области (*Finite Difference Time Domain, FDTD*) является одним из наиболее популярных методов численной электродинамики. Он основан на дискретизации уравнений Максвелла, записанных в дифференциальной форме, и относится к общему классу сеточных методов решений дифференциальных уравнений. Впервые базовый алгоритм был предложен Кейном Йи в 1966 году [1]. Однако, само название "Finite-difference time-domain" и аббревиатуру FDTD методу дал Аллен Тафлов в 1980 году [2].

Изначально под FDTD подразумевалось использование базового алгоритма Йи для численного решения уравнений Максвелла. Однако, сейчас метод включает в себя множество самых разнообразных возможностей, таких как моделирование сред с дисперсными и нелинейными свойствами, применение различных типов сеток (а не только прямоугольной сетки Йи), использование методов постпроцессорной обработки результатов.

В уравнениях Максвелла изменение электрического поля  $E$  зависит от распределения магнитного поля  $H$  в пространстве. А изменение поля  $H$ , в свою очередь, зависит от распределения поля  $E$ . Сетки для электрического и магнитного полей смещены по отношению друг к другу на полшага дискретизации по каждой из пространственных переменных и по времени. С помощью конечно-разностных уравнений можно определить поля  $E$  и  $H$  на текущем временном шаге из значений полей на предыдущем. Таким образом,

при заданных начальных условиях алгоритм Йи позволяет получить эволюционное решение во времени от начала отсчета с заданным временным шагом.

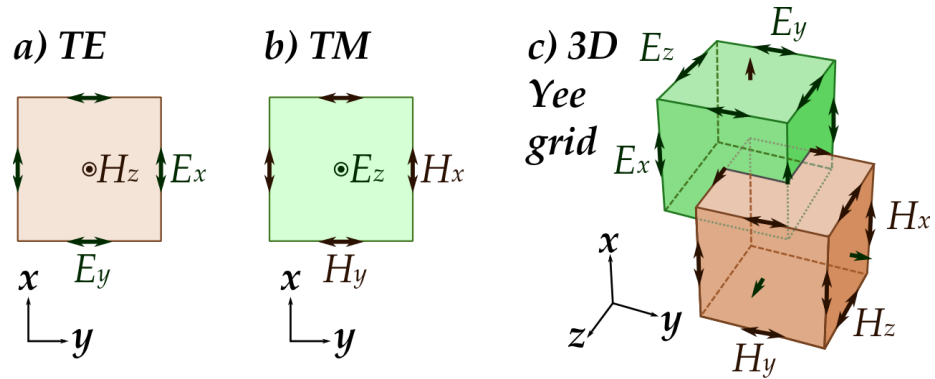


Рис. 1 Ячейка Йи в декартовых координатах.

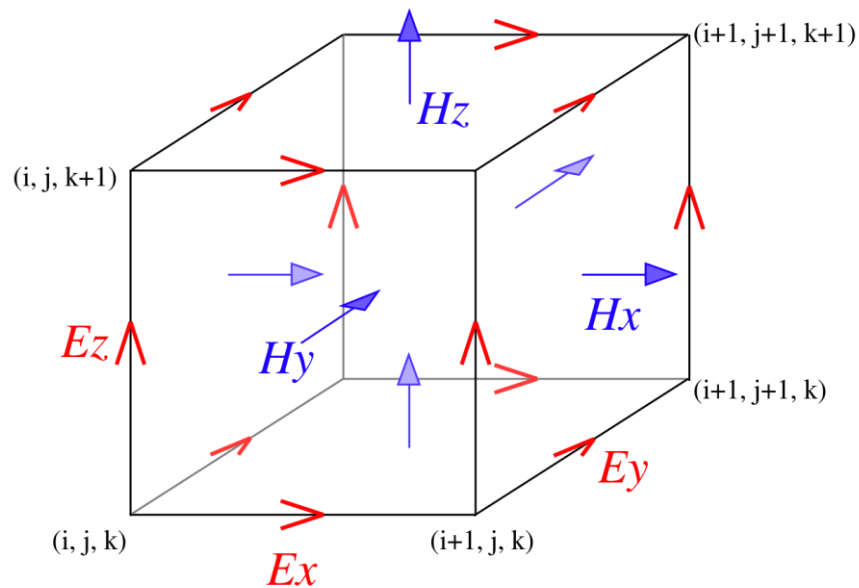


Рис. 2 Поля в ячейке сетки FDTD.

Так как метод работает во временной области, то он позволяет получить результат для широкого спектра длин волн за один расчет, что может быть полезно при решении определенного круга задач. FDTD удобен при задании нелинейных, анизотропных и дисперсных сред. Также он позволяет непосредственно моделировать краевые эффекты и эффекты экранирования.

Причем поля внутри и вне экрана не обязательно должны быть рассчитаны напрямую.

Недостатком метода является то, что величина шага дискретизации по пространству должна быть значительно меньше исследуемых длин волн и типичных размеров исследуемой структуры, что в некоторых случаях может потребовать сеток с меньшим шагом [3], из-за чего увеличатся затраты памяти и для расчета потребуется значительно большее время. Также FDTD рассчитывает поля внутри счетной области. И если потребуется найти поле на большом расстоянии от источника, то счетную область придется увеличить, что приведет к увеличению времени расчета. Существующие же модификации метода для нахождения поля на удалении требуют постобработки.

## 2.2 FIT

Метод конечного интегрирования (*Finite Integration Technique, FIT*) представляет собой схему пространственной дискретизации для численного решения задач электромагнитного поля во временной и частотной области. Впервые он был предложен в 1977 году Томасом Вейландом и в течение многих лет непрерывно улучшался [4].

Данный метод сохраняет основные топологические свойства непрерывных уравнений, таких как сохранение заряда и энергии. Основная идея этого подхода заключается в том, чтобы применить уравнения Максвелла в интегральной форме к набору разнесенных сетках.

Этот метод охватывает весь спектр электромагнетизма и оптических применений и является основой для многих коммерческих инструментов моделирования.

## 2.3 FEM

Метод конечных элементов (*Finite Element Method, FEM*) является численным методом решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Сложно сказать, когда точно возник данный метод. Его разработка прослеживается в 40х годах в работах Хренникова [5] и Куранта [6]. Строгое математическое обоснование для метода было представлено в 1973 году в публикации Стрэнга и Фикса [7]. Сейчас он используется для численного моделирования физических систем в самых разнообразных инженерных дисциплинах, например, электромагнетизма, теплообмена и динамики жидкостей [8].

В данном методе область, в которой ищется решение, разбивается на конечное число элементов (подобластей). Это позволяет более точное представление сложной геометрии и работу с разнородными свойствами материалов [9]. Для каждого элемента произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции (в простейшем случае - полином первой степени), которая равна нулю вне своего элемента. Решением задачи являются значения функций в узлах (на границах элементов), которые неизвестны заранее. Из условия равенства значений соседних функций в узлах ищутся коэффициенты аппроксимирующих функций. Далее составляется система линейных алгебраических уравнений, число которых прямо пропорционально количеству элементов. Решение системы облегчается тем, что она имеет разреженный вид, так как каждый элемент связан только с ограниченным числом соседних элементов.

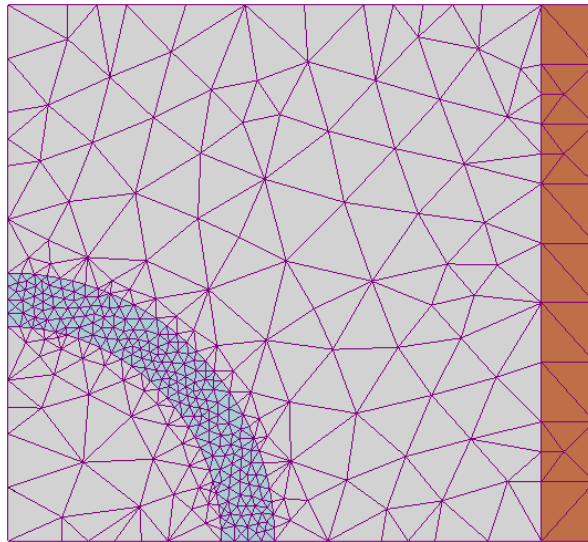


Рис. 3 Пример разбиения на конечные элементы.

С развитием вычислительных средств возможности метода постоянно расширяются, также расширяется и класс решаемых задач. В настоящее время он широко используется для решения задач электродинамики, гидродинамики, теплообмена и механики деформируемого твёрдого тела.

Произвольная форма обрабатываемой области и возможность сделать сетку более редкой в местах, где точность не критична, являются неоспоримыми преимуществами метода. Однако, долгое время его широкому распространению мешало отсутствие алгоритмов автоматического разбиения области. Лишь после решения этой задачи стало возможным создавать полностью автоматические системы автоматизированного проектирования (САПР).

## 2.4 PSSD

Псевдоспектральный метод в пространственной области (*Pseudo-Spectral Spatial Domain, PSSD*) решает уравнения Максвелла путем распространения их в выбранном пространственном направлении. Поэтому поля принимаются как функции от времени. Метод является псевдоспектральным, потому что



временные производные вычисляются в частотной области с помощью быстрых преобразований Фурье. Зависимость полей от времени позволяет быстро и точно моделировать произвольную дисперсию в среде распространения [10].

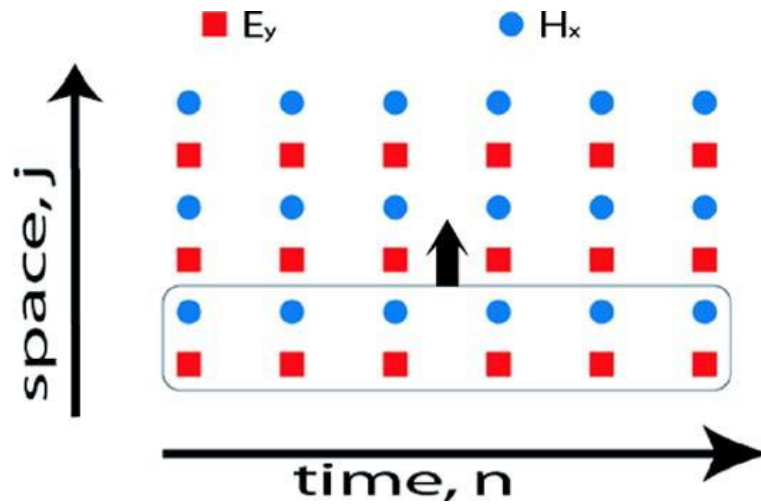


Рис. 4 Графическое представление сетки метода.

# Глава 3

## Обзор открытых пакетов

### 3.1 EMTL

EMTL (*Electromagnetic Template Library*) — бесплатная программа для решения уравнений Максвелла с помощью метода FDTD. EMTL компилируется под UNIX и Windows системы и поддерживает параллельные расчеты (MPI).

Основными "участниками" численного эксперимента FDTD являются: материальные тела, источник волны и детекторы. Детекторам не соответствуют какие-либо реальные объекты, подразумевается, что они лишь записывают значения полей в каких-то точках вычислительного объема в файл. Значения полей уже получают интерполяцией по соседним узлам.

Метод полного и рассеянного поля (Total Field / Scattered Field) используется для моделирования бесконечно удаленного источника плоской волны. Он основан на линейности уравнений Максвелла и следующего из них принципа суперпозиций. Разностные уравнения FDTD могут независимо применяться как для полного поля, так и для падающего или рассеянного полей, что позволяет разбить вычислительный объем на область полного поля и область рассеянного поля. Их разделяет виртуальная граница, служащая для генерации плоской волны в область полного поля. Разностные уравнения, которые используются для расчета компонент поля в прилегающих к этой границе сеточных узлах, отличаются от исходных наличием дополнительных компонент, учитывающих значение поля падающей волны.

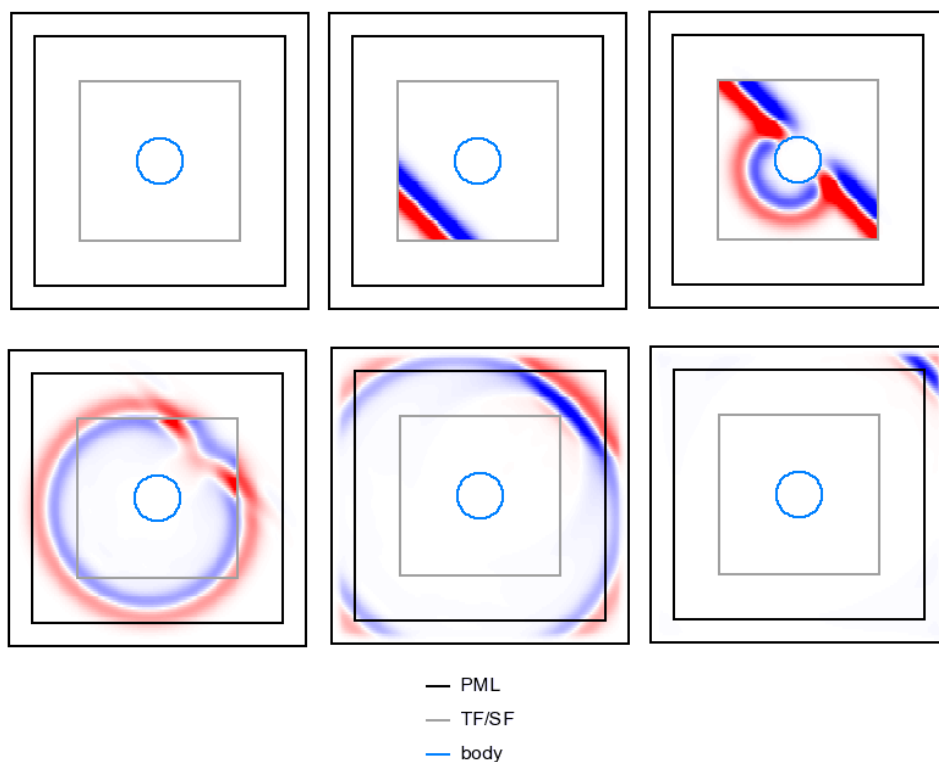
Для моделирования ухода волны из вычислительного объема на бесконечность требуются поглощающие граничные условия. Одной из

лучших реализаций является использование вдоль границы тонкого слоя специального материала, называемого идеально согласованным слоем (*Perfectly Matched Layer, PML*). Таким образом, все падающие на границу вычислительного объема волны вне зависимости от угла падения поглощаются этим материалом.

Для моделирования бесконечных периодических структур используются периодические граничные условия по одному или нескольким направлениям.

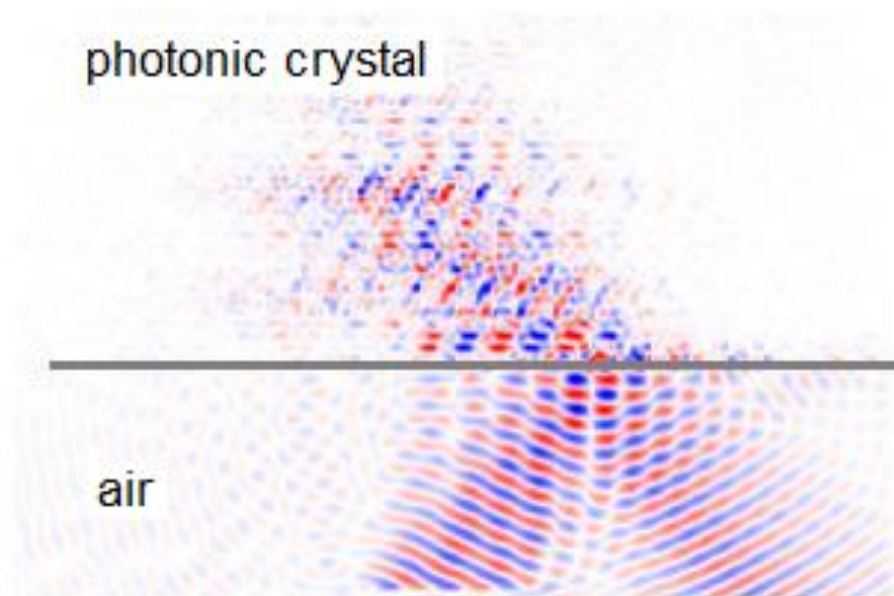
В FDTD, как и в прочих разностных методах, существует проблема неточного отображения границы тела на вычислительную сетку. В непосредственной близости от границы двух сред уравнения Максвелла должны решаться с учетом граничных условий для векторов  $E$  и  $H$ . Любая разделяющая соседние среды кривая поверхность, геометрически не согласованная с сеткой, будет искажаться эффектом "лестничного приближения". Метод подсеточного сглаживания (*subpixel smoothing*) основывается на введении эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  вблизи границы между телами [11].

Одним из примеров работы EMTL может служить расчет поведения плоской волны при падении под углом  $45^\circ$  на стеклянную сферу (показатель преломления  $n=1.45$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon=n^2$ ).



*Рис. 5* Кадры решения задачи о падении плоской волны на стеклянную сферу.

Другой пример: расчет магнитного поля при падении плоской волны на полубесконечный фотонный кристалл.



*Рис. 6* Кадр магнитного поля в фотонном кристалле после 5000 итераций.

На кадре магнитного поля после можно наблюдать негативное преломление.

## 3.2 МЕЕР

МЕЕР (*MIT Electromagnetic Equation Propagation*) – еще один бесплатный пакет для моделирования электромагнитных систем с помощью FDTD метода. Он распространяется по лицензии GNU GPL, работает на любых UNIX-системах.

Пакет позволяет проводить параллельные вычисления (MPI). С его помощью можно моделировать одномерные, двумерные, трехмерные системы и системы в цилиндрических координатах. При использовании МЕЕР можно задавать произвольные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей ( $\epsilon$  и  $\mu$ ), дисперсию (их зависимость от частоты), положительные и отрицательные потери, нелинейность диэлектрических и магнитных материалов, электрическую и магнитную проводимость. Пакет поддерживает поглощающие граничные условия (как PML слои) и периодические граничные условия Блоха. Для уменьшения размеров расчетной области возможно использование зеркальной симметрии и симметрии вращения на 90 или 180 градусов [12].

В следующей задаче требовалось рассчитать спектр удаленного от источника поля (Near-to-far-field spectra). Для этого не обязательно проводить полную симуляцию всей области от источника до искомого поля, а использовать преобразование ближнего поля в дальнее (Near-to-Far-Field Transformation). Данный метод основан на принципе эквивалентности [13] и использует аналитические функции Грина для расчета любой "дальней" области.

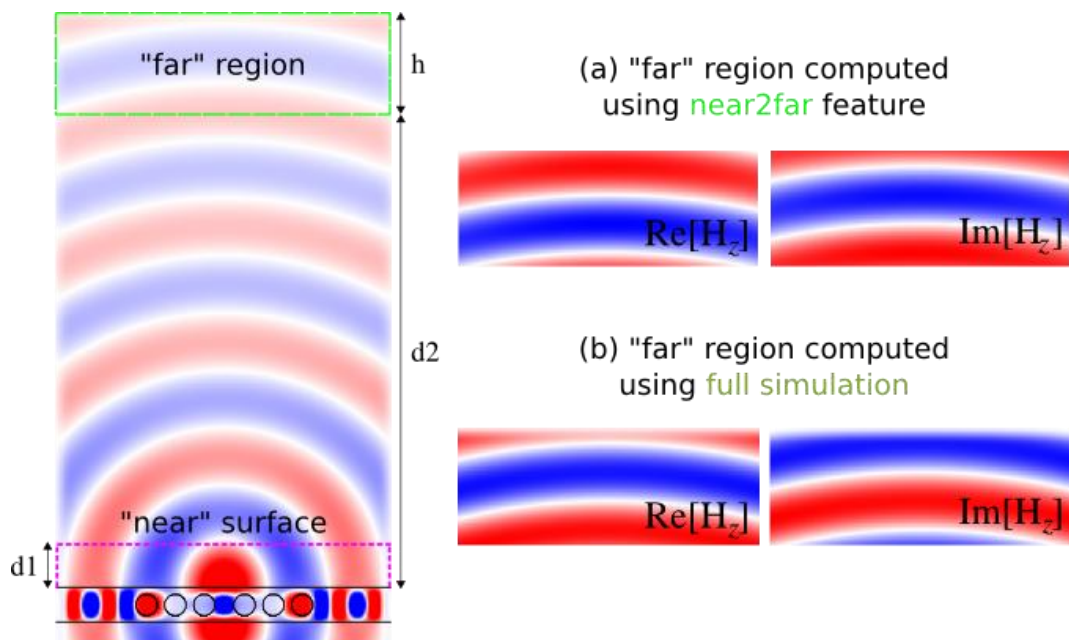


Рис. 7 Решение задачи о нахождении спектра поля, удаленного от источника.

Как видно из рисунка, результаты преобразования ближнего поля в дальнее совпадают с результатами полной симуляции.

Еще одним примером работы пакета может служить моделирование кольцевых резонаторов, которые представляют собой замкнутые в круг волноводы.

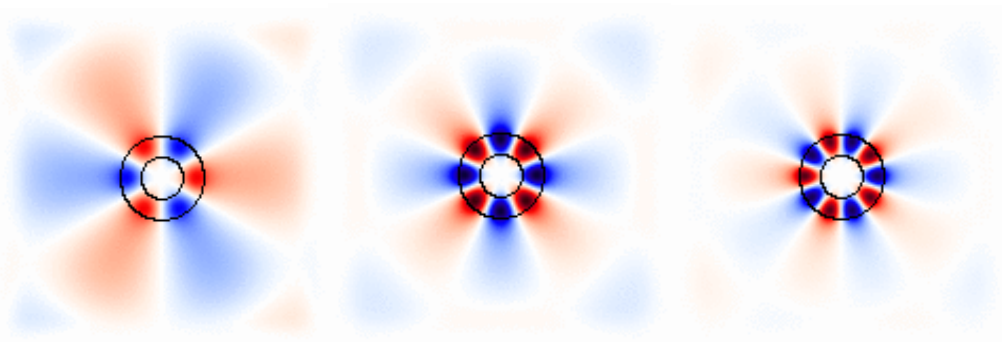


Рис. 8 Примеры кольцевых резонаторов.

## **Глава 4**

### **Заключение**

В работе был проведен обзор некоторых из существующих методов решения уравнений Максвелла. Были рассмотрены открытые пакеты, используемые для решения уравнений Максвелла с помощью метода конечных разностей во временной области и позволяющие решать задачи моделирования электромагнитных систем. Разработан ряд тестовых примеров на основе этих пакетов.

# Литература

1. Kane Yee (1966), «Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media». *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* **14** (3): 302–307
2. Allen Taflove, Susan C. Hagness (1980), «Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method», *Artech House Publishers. ISBN 1-58053-832-0.*
3. S. S. Zivanovic, K. S. Yee, and K. K. Mei (1991). «A subgridding method for the Time Domain Finite-Difference Method to solve Maxwell's equations», *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **38**: 471.
4. T. Weiland, (1977), «A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields», *Electronics and Communications AEUE, vol. 31, no. 3, pp. 116–120.*
5. Hrennikoff Alexander (1941). «Solution of problems of elasticity by the framework method». *Journal of applied mechanics* **8.4**: 169–175.
6. Courant R. (1943). «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations». *Bulletin of the American Mathematical Society* **49**: 1–23. doi:10.1090/s0002-9904-1943-07818-4
7. Strang, Gilbert; Fix, George (1973), «An Analysis of The Finite Element Method», *Prentice Hall. ISBN 0-13-032946-0.*
8. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z. (2005), «The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (Sixth ed.) », *Butterworth-Heinemann. ISBN 0750663200.*
9. Reddy, J. N. (2006), «An Introduction to the Finite Element Method (Third ed.) ». *McGraw-Hill. ISBN 9780071267618*



10. J. C. A. Tyrrell, P. Kinsler, G. H. C. New (2006), «Pseudospectral spatial-domain: a new method for nonlinear pulse propagation in the few-cycle regime with arbitrary dispersion», *Journal of Modern Optics* 52, 973 (2005); *doi:10.1080/09500340512331334086*
11. Alexei Deinega, Ilya Valuev (2007), «Subpixel smoothing for conductive and dispersive media in the finite-difference time-domain method», *Opt. Lett.* 32, 3429
12. Ardavan F. Oskooi, David Roundy, Mihai Ibanescu, Peter Bermel, J. D. Joannopoulos, Steven G. Johnson (2010), «MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method», *Computer Physics Communications* **181**, 687–702
13. Ardavan Oskooi, Steven G. Johnson, (2013), «Electromagnetic Wave Source Conditions», *Artech House, ISBN 978-1-60807-170-8*