

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

МУСИНОВ ИГОРЬ ИГОРЕВИЧ

Моделирование методом SPH повреждения и пробивания металлической
преграды высокоскоростным осколком

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Направление подготовки 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

Заведующий кафедрой _____ член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. Петров И.Б.

Научный руководитель _____ к.ф.-м.н Васюков А.В.

Студент _____ Мусинов И.И.

г. Долгопрудный

2016

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Введение | 1 |
| 2 | Постановка задачи | 4 |
| 3 | Модель вещества и численный метод | 4 |
| 3.1 | Модель вещества | 4 |
| 3.2 | Численный метод SPH | 5 |
| 3.3 | Обычный метод SPH и его модификации | 7 |
| 3.3.1 | Оригинальный метод | 7 |
| 3.3.2 | Метод инвариантов Римана | 8 |
| 3.3.3 | Метод с вязкостью | 9 |
| 3.3.4 | Гибридизированный метод | 10 |
| 4 | Структура программы | 11 |
| 5 | Результаты расчетов | 13 |
| 5.1 | Моделирование пробития преграды конечной толщины осколками, имеющими форму куба | 15 |
| 5.2 | Моделирование пробития преграды конечной толщины осколками, имеющими форму параллелепипеда | 17 |
| 5.3 | Моделирование пробития преграды конечной толщины осколками, имеющими форму шара | 19 |
| 5.4 | Столкновение космического мусора / метеорита со спутником | 22 |
| 5.5 | Заключение | 23 |
| 6 | Список использованных источников | 24 |

1 Введение

В наше время происходит активное освоение космоса. С каждым годом околоземное пространство все больше заполняется отработавшими аппаратами, обломками от испытания противоспутниковых ракет и прочим космическим мусором. Это создает опасность для спутников. Ко-

личество осколков, имеющих диаметр >10 , от 1-10 см, до 1 см, оценивается 21000, 500000 и 1000000 соответственно. Осколки больше 10 см в диаметре отслеживаются и каталогизируются, в отличие от осколков меньшего диаметра. Курсы спутников и космических станций все время корректируется, для избежания соударения с большими осколками, но невозможно уклониться от облака мелких обломков. Несмотря на маленький размер осколков, из-за высокой скорости удара (приблизительно 10 км/с) они могут нанести урон поверхности наружных приборов или даже пробить обшивку, что в некоторых случаях может привести к потере спутника. К тому же число таких осколков стремительно увеличивается, после каждого соударения, что приводит к образованию облаков из космического мусора (синдром Кесслера). На высоте 1000 км это облако способно существовать порядка 100 лет и более. Сейчас не производится сбор космического мусора и отработавших аппаратов, вместо этого их отводят на более высокие орбиты. В ближайшем будущем проблема космического мусора, а также вывода космических аппаратов на орбиты будет очень актуальна.

Из-за высокой стоимости вывода груза на орбиты, невозможно бесконечно увеличивать обшивку аппарата. Также для защиты спутников от космического мусора и астероидов необходимы исследования высокоскоростного удара.

В данной работе моделируется высокоскоростной удар. В виду того, что постановка реального опыта с высокими скоростями, сопряжена с некоторыми сложностями, эксперимент чисто вычислительный. Плюс этого подхода в том, что имея небольшие вычислительные мощности, возможно в кратчайшие сроки получить результаты.

Для исследования задачи был выбран метод SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)[5]. SPH является не-сеточным Лагранжевым численным методом, который хорошо работает в задачах с сильной деформацией и разлетом вещества, а также просто реализуется для трехмерной задачи. Тема исследования метода SPH на данный момент очень популярна, среди тех кто изучает высокоскоростной удар.

Метод реализуется в консервативной форме. Производные вычисляются с помощью сплайн-интерполяции. Каждый элемент вещества(частица)

является точкой интерполяции. В этой точке известны параметры среды. С помощью интерполяционных функций и этих точек и получается проинтегрировать решение в области. В задаче часто используется вычисление градиентов гладких аналитических функций.

Метод изобретен в 1977 году. Оригинальный метод SPH обладал сильной немонотонностью. Немонотонность являлась помехой для решения задач с интенсивными взаимодействиями. К середине 80-х годов Моноганом была предложена и исследована подходящая искусственная вязкость, которая давала приличные результаты в решении задачи Римана. А так же исследованы вопросы аппроксимации. Теоретического решения проблемы устойчивости метода и выбора максимального шага по времени по сей день не найдено. Обычно в статьях указывают на то, что численный эксперимент показал такие то ограничения на шаг интегрирования. Применению метода для решения различного рода задач посвящено достаточно большое количество публикаций вышедших в 80-е-90-е годы. В основном работы содержали построение SPH-метода для решения задач в области газодинамики, теплопроводности, гидродинамики, механики деформируемого тела. Следующий качественный скачок в области развития данного метода был в конце прошлого столетия. Медин С.А. и Паршиков А.Н. опубликовали работу, в которой предложили вместо искусственной вязкости использовать решение задачи о распаде разрыва [3]. После чего последовал ряд статей показывающих, что использование даже приближенного аналитического решения задачи Римана позволяет добиться аккуратного описания ударных волн, при сохранении всех положительных свойств метода. Так же был опубликован ряд работ предлагающих улучшенные приближенные решения задачи Римана, использование которого позволяло поднять точность метода сглаженных частиц. Кроме того, существуют гибридные методы. В данном отчете используется вариант SPH-метода, в котором монотонной схемой является метод с использованием решения задачи Римана.

2 Постановка задачи

- Воспроизвести условия нескольких экспериментов по пробитию металлической пластины различными объектами.
- Получить расчеты модели Мизеса-Шлейхера методом SPH.
- Верифицировать результаты с моделью Джонсона-Кука и методом FEM, чьи выводы совпали с реальными экспериментами.

3 Модель вещества и численный метод

3.1 Модель вещества

Уравнения упругопластичной модели вещества:

$$\text{Закон сохранения вещества: } \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Закон сохранения импульса: } \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \hat{\sigma} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Закон сохранения энергии: } \frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \hat{\sigma}^{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \quad (3)$$

$$\text{Реологическое соотношение: } \frac{d\hat{S}^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) + \hat{S}^{\alpha\gamma}\hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{S}^{\beta\gamma}\hat{R}^{\gamma\alpha} \quad (4)$$

$$\text{Уравнение состояния Мурнагана: } p = p(\rho, e) = \frac{K}{n} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right) \quad (5)$$

Где:

ρ - плотность среды

\mathbf{u} - вектор скорости

$\hat{\sigma} = -p\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{S}}$ - тензор напряжения

$\hat{\mathbf{I}}$ - единичный тензор

$\hat{\mathbf{S}}$ - девиатор

e - внутренняя энергия среды

$\hat{\epsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$ - компоненты тензора скоростей деформации

μ - коэффициент Ламе

$\frac{D\hat{A}}{Dt} = \frac{D\hat{A}^{\alpha\beta}}{Dt} = \frac{d\hat{A}^{\alpha\beta}}{dt} + \hat{A}^{\alpha\gamma} \hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{A}^{\beta\gamma} \hat{R}^{\gamma\alpha}$, производная Яуманна по

времени, $\hat{R}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$

k - предел текучести на сдвиг

учет условия Мизеса $\theta(s) = \begin{cases} 0, & \text{при } s < 2k^2 \text{ (Случай упругой среды)} \\ 0, & \text{при } s = 2k^2 \text{ при разгрузке } (\hat{S}^{\alpha\beta} \hat{\epsilon}^{\alpha\beta}) \leq 0 \\ \frac{\mu}{k^2}, & \text{при } s = 2k^2 \text{ при загрузке } (\hat{S}^{\alpha\beta} \hat{\epsilon}^{\alpha\beta}) > 0 \end{cases}$

K, n - константы в уравнении состояния Мурнагана, определяемые экспериментальным путем.

Используется теория Прандтля-Рейсса, описывающая пластические течения. А также критерий Мизеса для определения начала пластического течения. При $S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 2k^2$ пластическое течение, $S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} < 2k^2$ движение среды упруго, k - предел текучести на сдвиг.

3.2 Численный метод SPH

Метод заключается в аппроксимации функции какой-либо физической величины:

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x') \delta(x'-x) dx'$$

Заменим функцию Дирака на аналитическую функцию $\omega(x'-x, h)$, называемой ядром сглаживания с h - радиусом сглаживания.

$$\overline{f(x)} = \int_{\mathbf{R}} f(x') \omega(x'-x, h) dx'$$

Зная плотность вещества перепишем формулу:

$$\overline{f(x)} = \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{f(x')}{\rho(x')} \right] \omega(x'-x, h) \rho(x') dx'$$

Разбиваем наш объект на маленькие элементы. У каждого элемента известны его координаты x_i , масса m_i и плотность ρ_i , а также имеет

значение физического параметра $f(\mathbf{x}) = f_i$. Изначальное расположение элементов - кубическая решетка.

Тем самым мы можем перейти от интеграла по области к суммированию по элементам:

$$\overline{f(\mathbf{x})} = \sum_i \frac{m_i f_i}{\rho_i} \omega(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, h)$$

Это также упрощает вычисление производной от физического параметра:

$$\frac{\partial \overline{f(\mathbf{x})}}{\partial x_\alpha} = \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{f(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} \right] \omega(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

Существуют и другие приближения $\frac{\partial \overline{f(\mathbf{x})}}{\partial x_\alpha}$, но их рассматривать мы не будем.

Ядро сглаживания должно обладать следующими свойствами:

$$\int_{\mathbf{R}} \omega(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(\mathbf{x}, h) = \delta(\mathbf{x})$$

В качестве функции ядра сглаживание, необходимо взять аналитическую функцию с конечным носителем. Это упростит процесс вычисления суммы по соседним частицам. Возьмем кубический сплайн:

$$\omega(\mathbf{x}, h) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{3}{2}\varphi^2 + \frac{3}{4}\varphi^3}{\pi h^3}, \varphi \in [0, 1] \\ \frac{(2 - \varphi)^3}{4\pi h^3}, \varphi \in [1, 2] \\ 0, \varphi \in [2, \infty] \end{cases}$$

где $\varphi = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{h}$.

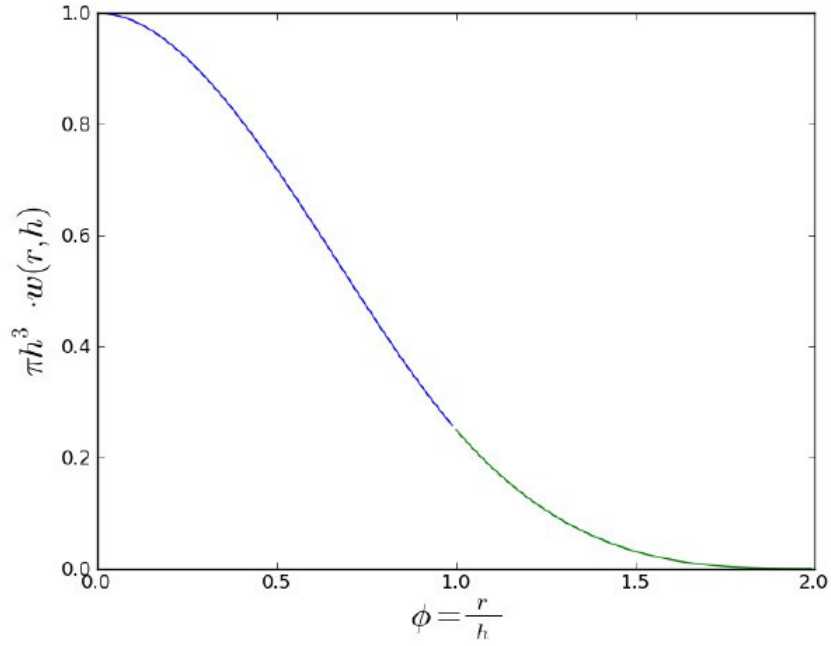


Рис. 1: Функция ядра сглаживания

3.3 Обычный метод SPH и его модификации

3.3.1 Оригинальный метод

Аппроксимация законов сохранения и реологического соотношения:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = - \sum_k m_k (u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha}$$

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_k m_k (u_i^\alpha - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{d\hat{S}^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) + \hat{S}^{\alpha\gamma}\hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{S}^{\beta\gamma}\hat{R}^{\gamma\alpha}$$

$$\epsilon_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$R_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

Схема интегрирования уравнений для каждой i частицы:

$$\bar{x}_i^{n+1} = \bar{x}_i^{n+1} + \Delta t \left(\bar{u}_i^{n+1} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\bar{u}_i^{n+1}}{dt} \right)$$

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \Delta t \frac{e_i^n}{dt}$$

$$\rho_i^{n+1} = e_i^n + \Delta t \frac{\rho_i^n}{dt}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{u_i^n}{dt}$$

$$\hat{S}_i^{n+1} = \hat{S}_i^n + \Delta t \frac{\hat{S}_i^n}{dt}$$

$$\hat{\sigma}_i^{n+1} = -\hat{\delta} \cdot P(\rho_i^{n+1}, e_i^{n+1}) + \hat{S}_i^{n+1}$$

Шаг интегрирование $\Delta t = \min_i \frac{\alpha h_i}{\sqrt{\max(c_i, u_i)^2 + \left(\frac{h_i \dot{\rho}_i^2}{\rho_i}\right)}}$, где $\alpha \in$

$[0,2,0,4]$, c_i - скорость звука в i частице.

3.3.2 Метод инвариантов Римана

Кроме предложенного метода может использоваться метод инвариантов Римана[3]. Это метод обеспечивает монотонность решения, но может сильно "сгладить" решение, поэтому его совмещают с оригинальным.

В методе заменяются выражения $f_i + f_j$ и $f_i - f_j$ на $2f_{ij}^*$ и $2(f_{ij}^* - f_j)$ соответственно. Где f_i и f_j - значения наших "полевых" функций, $f(x)_{ij}^*$ - решение задачи о распаде разрыва. Чтобы найти аппроксимацию, перейдем в систему координат ORST (OR направлена от i частицы к ее j соседу). OS, OT выбираются таким образом - чтобы образовывать ортонормированный базис. В акустическом приближении скорость и напряжение вычисляется следующим образом:

$$u_{ij}^{S*} = \frac{u_j^S \rho_j C_j^t + u_j^S \rho_i C_i^t + \sigma_j^{SR} - \sigma_i^{SR}}{\rho_i C_j^t + \rho_i C_i^t}$$

$$\sigma_{ij}^{SR*} = \frac{\sigma^S R_j \rho_j C_j^t + \sigma^S R_j \rho_i C_i^t + \rho_j C_j^t \rho_i C_i^t (u_j^S - u_i^S)}{\rho_i C_j^t + \rho_i C_i^t}$$

$$u_{ij}^{T*} = \frac{u_j^T \rho_j C_j^t + u_j^T \rho_i C_i^t + \sigma_j^{TR} - \sigma_i^{TR}}{\rho_i C_j^t + \rho_i C_i^t}$$

$$\sigma_{ij}^{TR*} = \frac{\sigma_j^{TR} \rho_j C_j^t + \sigma_j^{TR} \rho_i C_i^t + \rho_j C_j^t \rho_i C_i^t (u_j^T - u_i^T)}{\rho_i C_j^t + \rho_i C_i^t}$$

$$u_{ij}^{R*} = \frac{u_j^R \rho_j C_j^l + u_j^R \rho_i C_i^l + \sigma_j^{RR} - \sigma_i^{RR}}{\rho_i C_j^l + \rho_i C_i^l}$$

$$\sigma_{ij}^{RR*} = \frac{\sigma_j^{RR} \rho_j C_j^l + \sigma_j^{RR} \rho_i C_i^l + \rho_j C_j^l \rho_i C_i^l (u_j^R - u_i^R)}{\rho_i C_j^l + \rho_i C_i^l}$$

Это не единственный способ приближения задачи Римана. Существуют и другие работы как по итеративным, так и по неитеративным алгоритмам решения задачи Римана. Эти методы улучшают расчет ударных процессов в моделируемых экспериментах, что и улучшает точность метода.

В методе Римана используется другая аппроксимация физических формул:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -2 \sum_k m_k (u_{ik}^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha}$$

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta*}}{\rho_i \rho_k} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{de_i}{dt} = 2 \sum_k m_k (u_{ik}^{\alpha*} - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta*}}{\rho_i \rho_k} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{d\hat{S}^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) + \hat{S}^{\alpha\gamma}\hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{S}^{\beta\gamma}\hat{R}^{\gamma\alpha}$$

$$\epsilon_i^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_k^{\beta*} - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$R_i^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_k^{\beta*} - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

3.3.3 Метод с вязкостью

Для борьбы с нефизичными осцилляциями Моноган предложил использовать искусственную вязкость. Численный эксперимент показал, что применение такой же формы вязкости в задачах механики деформируемого твердого тела дает удовлетворительные результаты.

При использовании искусственной вязкости изменяем множитель $(u_k^\alpha - u_i^\alpha)$, добавляя в него $\frac{a\xi_{ik}\bar{c}_{ik} + b\xi_{ik}^2}{\bar{\rho}_{ik}}$, где

$$\xi_{ik} = -\frac{(u_k^\alpha - u_i^\alpha)(x_k^\alpha - x_i^\alpha)h}{(x_k^\alpha - x_i^\alpha)^2 + 0.01h^2}$$

\bar{c}_{ik} - средняя скорость звука

$\bar{\rho}_{ik}$ - средняя плотность

a и b - коэффициенты искусственной вязкости

Численные аппроксимации с учетом вязкости будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\sum_k m_k (u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha}$$

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} + \frac{a\xi_{ik}\bar{c}_{ik} + b\xi_{ik}^2}{\bar{\rho}_{ik}} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_k m_k (u_i^\alpha - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} + \frac{a\xi_{ik}\bar{c}_{ik} + b\xi_{ik}^2}{\bar{\rho}_{ik}} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{d\hat{S}^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) + \hat{S}^{\alpha\gamma}\hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{S}^{\beta\gamma}\hat{R}^{\gamma\alpha}$$

$$\epsilon_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$R_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

Способ интегрирования для i частицы остается тот же что и в оригинальном методе. Шаг по времени не меняется

Хоть метод с искусственной вязкостью и обладает немонотонностью, в этом случае она не такая большая как в оригинальном методе, поэтому можно использовать этот метод при решении задач деформации.

3.3.4 Гибридный метод

С целью сочетания второго порядка точности и монотонности было предложено использовать гибридную схему, предложенную в работе [12]. Этот метод воплотил в себе оригинальный без искусственной вязкости, и монотонный метод. Вычислительный опыт показывает, что наиболее

точное решение получается при линейной комбинации с коэффициентом смешивания $\beta = 0.5$. В этом случае аппроксимации уравнений выписываются в следующем виде:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -(1 - \beta) \sum_k m_k (u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} - \beta 2 \sum_k m_k (u_{ik}^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha}$$

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = (1 - \beta) \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + \beta \cdot \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta*}}{\rho_i \rho_k} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{de_i}{dt} = (1 - \beta) \sum_k m_k (u_i^\alpha - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + \beta \cdot 2 \sum_k m_k (u_{ik}^{\alpha*} - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta*}}{\rho_i \rho_k} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\frac{orig d\hat{S}^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) + \hat{S}^{\alpha\gamma}\hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{S}^{\beta\gamma}\hat{R}^{\gamma\alpha}$$

$$orig \epsilon_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$orig R_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$\frac{riem d\hat{S}^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) + \hat{S}^{\alpha\gamma}\hat{R}^{\gamma\beta} + \hat{S}^{\beta\gamma}\hat{R}^{\gamma\alpha}$$

$$riem \epsilon_i^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_k^{\beta*} - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$riem R_i^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_k^{\beta*} - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right]$$

$$\frac{dS_i^{\alpha\beta}}{dt} = (1 - \beta) \cdot \frac{d^{orig} S_i^{\alpha\beta}}{dt} + \beta \cdot \frac{d^{riem} S_i^{\alpha\beta}}{dt}$$

4 Структура программы

Программный комплекс состоит из следующих компонент:

- Генератор начальных данных из XML описания
- Вычислитель
- Визуализатор модели (частицы, срезы)

- Тестовый модуль
- Скрипты визуализации
- Скрипты пост-обработки
- Скрипты управления заданиями

Рассмотрим более подробную каждую компоненту и ее назначение. Генератор из XML файла строит набор частиц удовлетворяющий начальным условиям задачи, производится настройка физических параметров этих частиц, таких как скорость, тензор напряжений, и материал частиц. Используется группа примитивов, с помощью которых строится более сложные конструкции: параллелепипед, цилиндрическая оболочка с полусферическими окончаниями изменяемой длины с возможностью задания периодичности и толщины перегородок, полый параллелепипед с возможностью задания периодичности и толщины перегородок. Параметры каждого из примитивных объектов необходимо настроить. Среди всех встреченных реализаций вычислительных задач все генераторы начальных данных требовали написания кода на языке генератора, а так же последующей его сборки и установки. Это усложняет задачу, так как не дает возможность использовать внешние модули для визуальных систем редактирования начальных данных. Реализованный в рамках данной работы генератор обладает отличительной особенностью, которая заключается в том, что отсутствует необходимость компилировать и линковать генератор для каждой новой задачи. В случае использования на кластерах, когда исходный код собирается и устанавливается на каждом вычислительном ядре это преимущество становится еще более сильным. На выходе работы генератора мы имеем два файла в случае работы однопроцессорной версии программы, и по два файла на каждый вычислитель в случае работы параллельной версии программы. Первый файл содержит мета данные о модели, например, указания как часто необходимо сохранять модель, описание срезов, используемых в данной модели метод, и т.д. Файлы, полученные на выходе работы генератора начальных данных, поступают на вход вычислителю. После проведения одного шага интегрирования проводится проверка, которая показывает, какие срезы данных необходимо сохранить. Комплекс поддерживает работу с одно-, двух- и трехмерными срезами скалярных и векторных

величин. Для каждого среза необходимо указать его тип и соответствующие указанному типу координаты. Т.е. для одномерного среза начало и конец отрезка, вдоль которого будут сохраняться данные. Для двухмерного – три точки, которые являются вершинами параллелограмма, внутри которого сохраняются данные. Для трехмерного среза – четыре точки, которые являются вершинами параллелепипеда, внутри которого сохраняются данные. Так же необходимо указать количество точек вдоль каждой координаты, которое будет сохраняться. Т.е. для каждого среза строится набор точек, для которых проводится интерполяция значений с помощью сглаживающего ядра и именно эти значения сохраняются. Задав слишком большое число точек можно сделать сохранение величин на масштабах существенно меньших радиуса сглаживания. При решении прикладных задач такая функциональность вряд ли окажется востребованной, однако при разработке новых ядер будет весьма полезной. Дополнительно указывается, какие величины необходимо сохранить для данного среза. В рамках данной работы была реализована возможность сохранить плотность, вектор скорости, любую из компонент скорости, любую из компонент тензора напряжений, коэффициент гибридизации, идентификатор процесса, отвечающего за данную частицу, бинарный атрибут, указывающий разрушена ли данная частица. При задании среза возможно произвольное использование, описанных выше параметров. Визуализатор модели позволяет показать все частицы модели, а так же все срезы модели в трехмерном виде. Такой инструмент позволяет определить ошибки в задании начальных данных, описании геометрии модели и описании срезов до начала расчета, что позволяет существенно экономить время при проведении расчетов. Для визуализации сохраненных срезов использовались скрипты, позволяющие отображать двухмерные графики. Скрипты реализованы на основе библиотеки `matplotlib`.

5 Результаты расчетов

В программе LS-DYNA были поставлены 3 различных эксперимента высокоскоростного удара, подтвержденные реальными испытаниями. В

качестве модели использовалась модель Джонсона-Кука плюс разрушение по исчерпанию запаса пластичности и численный метод FEM.

Данная модель определяет сопротивление пластическому сдвигу Y в условиях развитых пластических деформаций, высоких скоростей деформаций и широком диапазоне температур (до температуры плавления). Она учитывает деформационное упрочнение, заметное (в несколько раз) повышение сопротивления металла сдвигу при высокоскоростном деформировании и разупрочнение металла при нагреве. Функциональная зависимость для сопротивления пластическому сдвигу имеет вид:

$$Y = (A + B\varepsilon^n) (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) (1 - T_*^m)$$

где, для стали 20 и стали 09Г2С, соответственно, принимаются следующие параметры модели: $A=0,25$ ГПа и $0,325$ ГПа - статические пределы текучести; $B=0,635$ ГПа и $0,582$ ГПа - модули деформационного упрочнения для данных сталей; $n = 0,32$ и $0,36$ - показатели степени в функции деформационного упрочнения; - эффективная пластическая деформация; $C=0,06$ и $0,022$ - коэффициенты кинематического упрочнения; $\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}$ - скорость эффективной пластической деформации, нормализованная значением, зависящим от выбранной системы размерностей; $T_* = (T - T_{ROOM}) / (T_{MELT} - T_{ROOM})$ - гомологическая температура; $m=1$ - показатель функции степени влияния температуры; $T_{MELT} = 1811$ К и 1780 К - температуры плавления, $T_{ROOM} = 293$ К - начальная температура.

Модель сопротивления пластическому сдвигу дополнена моделью разрушения по исчерпанию запаса пластичности. Для неоднородной деформации она определяется через относительное сужение: D_1 - предельная пластическая деформация, определяемая в статических испытаниях. $D_1 = \ln \left(\frac{1}{1 - \psi} \right)$. Величина D_1 равна $0,8$ и $0,7$ для сталей 20 и 09Г2С соответственно, где - предельное сужение при растяжении образца. Также используется уравнение состояния Грюнайзена

$$P = \frac{\rho_0 c^2 \mu [1 + \mu]}{[1 - (S_1 - 1) \mu]^2} + \gamma_0 \rho E$$

где D – скорость ударной волны; c , S_1 – коэффициенты линейной аппроксимации D - u -соотношения, u – массовая скорость за фронтом ударной волны, ρ , ρ_0 , – соответственно начальная и текущая плотности, γ_0 – коэффициент Грюнайзена, E – удельная внутренняя энергия, $\mu = \rho/\rho_0 - 1$.

Для обеих марок сталей принимается $c=3,8$ км/с, $S_1 = 1,58$, $\gamma_0 = 1,7$.

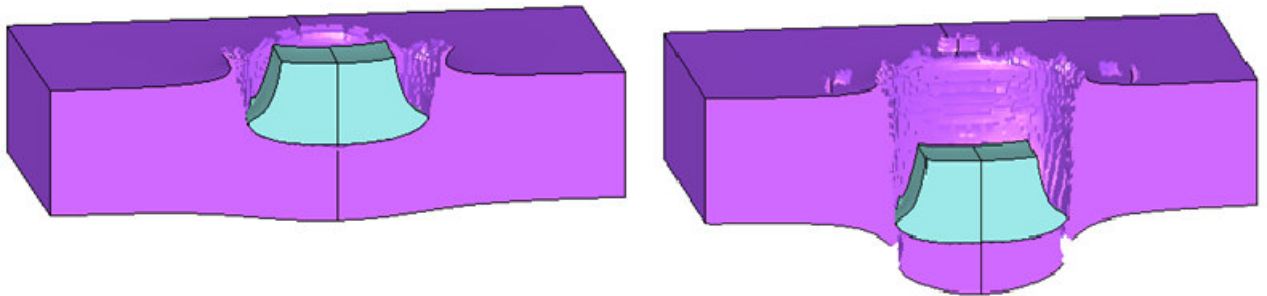
По расчетным зависимостям, принятым в организации, при определении предельной толщины пробиваемой преграды $h_{пр}$ одним из определяющих параметров является коэффициент формы осколка K_ϕ , величина которой является функцией площади мишеня $K_\phi = f(S_m)$. Для неориентированных осколков принимается $S_m = S_{\pi}/4$, где S_{π} - полная площадь поверхности осколка, если ориентация осколка известна, то за S_m принимается площадь проекции осколка на плоскость перпендикулярную вектору скорости

В нижеприведенных результатах расчетов показано влияние значения K_ϕ при взаимодействии осколков одинаковой массы (с различными площадями мишеня) с преградой.

5.1 Моделирование пробития преграды конечной толщины осколками, имеющими форму куба

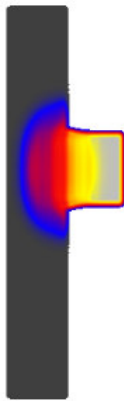
Материал преграды сталь 09Г2С. Толщина преграды 6,2 мм. Параметры осколка: Материал сталь 20, Масса осколка - 1.5 г, Скорость – 1150 м/с, Площадь мишеня равна 0.49 см².

Расчет LS-DYNA - пробитие

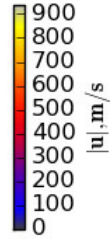
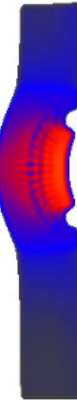


Расчет SPH - пробитие

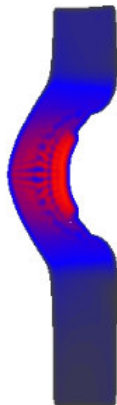
step 130, time 1.7054800111e-06
sat con



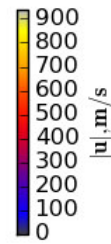
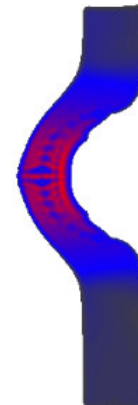
step 1000, time 1.29161289546e-05
sat con



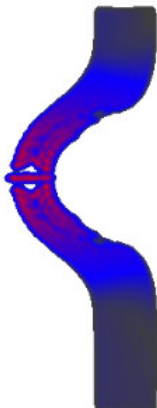
step 1500, time 1.93483082274e-05
sat con



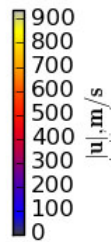
step 2000, time 2.58182320095e-05
sat con



step 2500, time 3.22766501348e-05
sat con

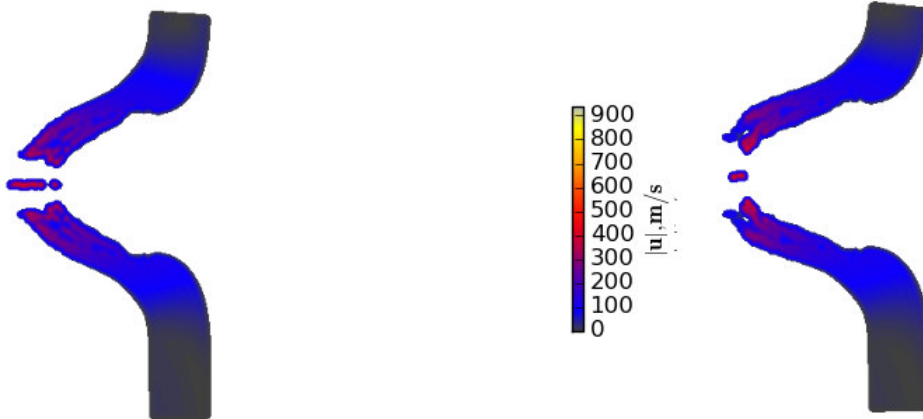


step 3000, time 3.87512030184e-05
sat con



step 3500, time 4.52705090391e-05
sat con

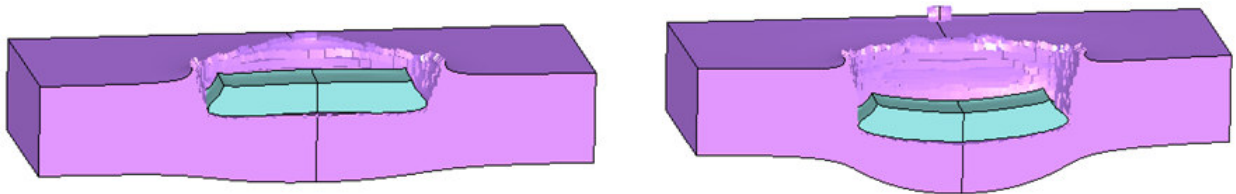
step 4000, time 5.17969299431e-05
sat con



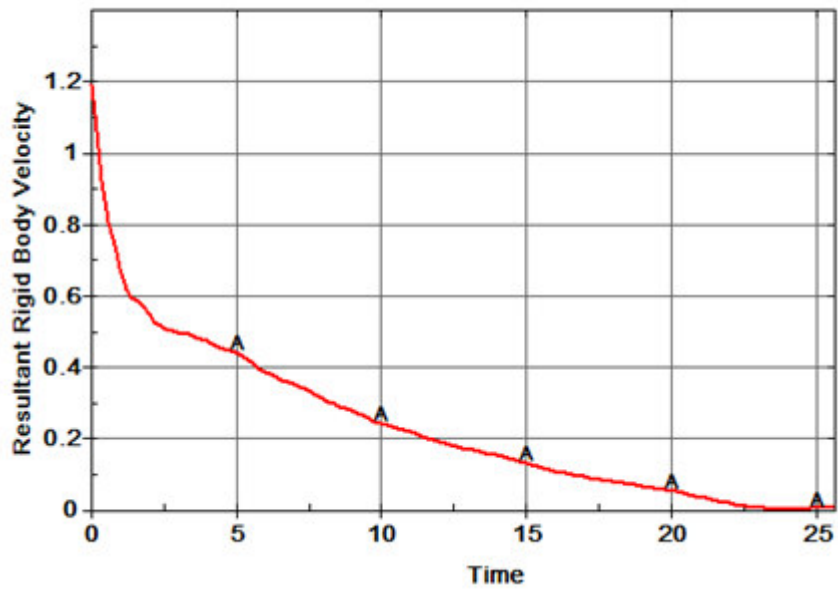
5.2 Моделирование пробития преграды конечной толщины осколками, имеющими форму параллелепипеда

Материал преграды сталь 09Г2С. Толщина преграды 6,2 мм. Параметры осколка: Материал сталь 20, Масса осколка - 1.5 г, Скорость – 1200 м/с, Площадь мишени равна 0.58 см².

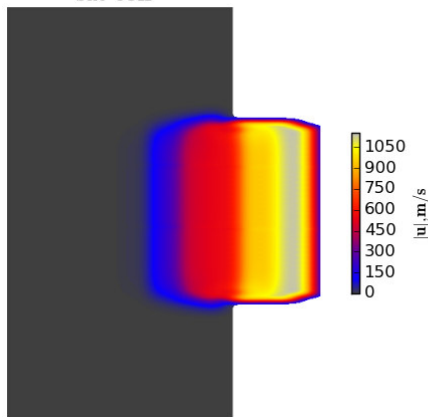
Расчет LS-DYNA - нет пробития



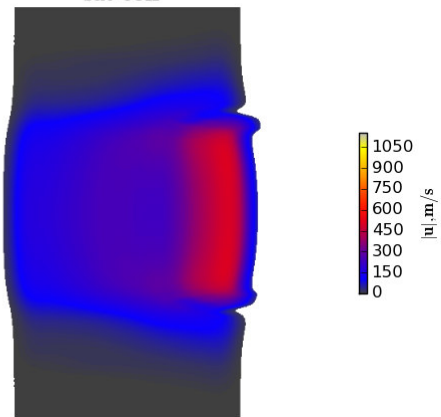
Расчет SPH - нет пробития



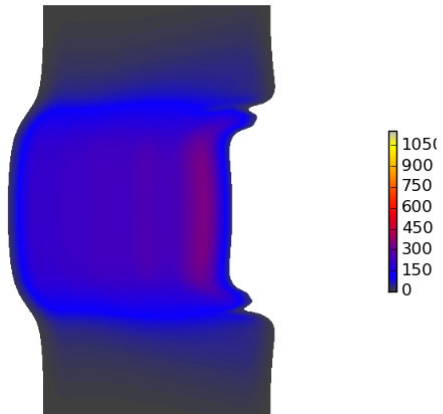
step 45, time 5.90213385885e-07
sat con



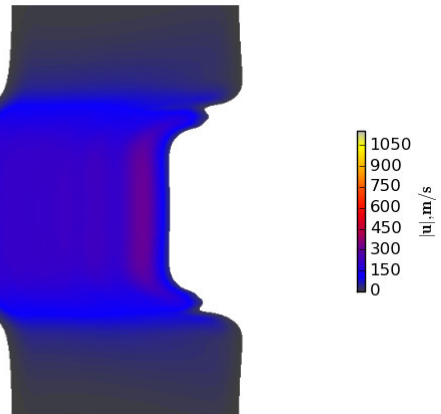
step 300, time 3.88960780858e-06
sat con



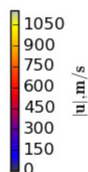
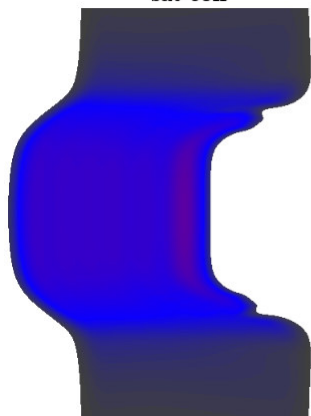
step 600, time 7.79219484155e-06
sat con



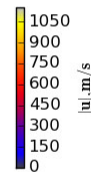
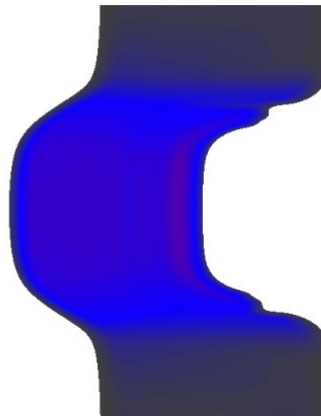
step 800, time 1.03972294053e-05
sat con



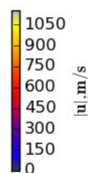
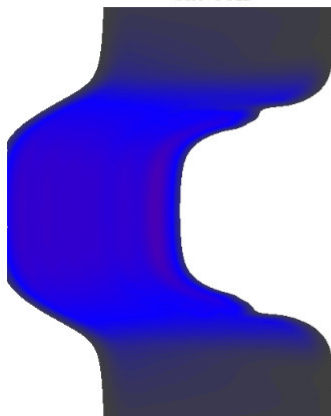
step 1000, time 1.29997735341e-05
sat con



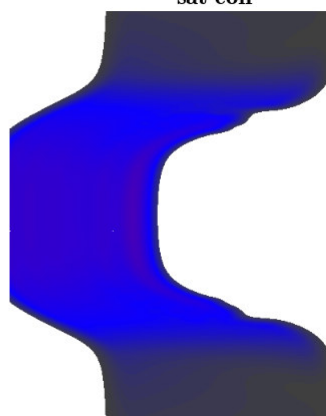
step 1200, time 1.56070264786e-05
sat con



step 1400, time 1.82183968344e-05
sat con



step 1600, time 2.08340800827e-05
sat con

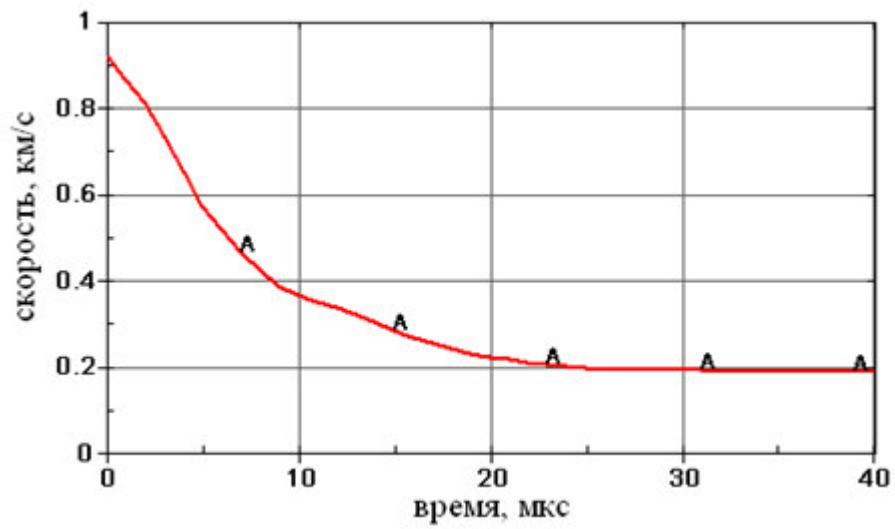
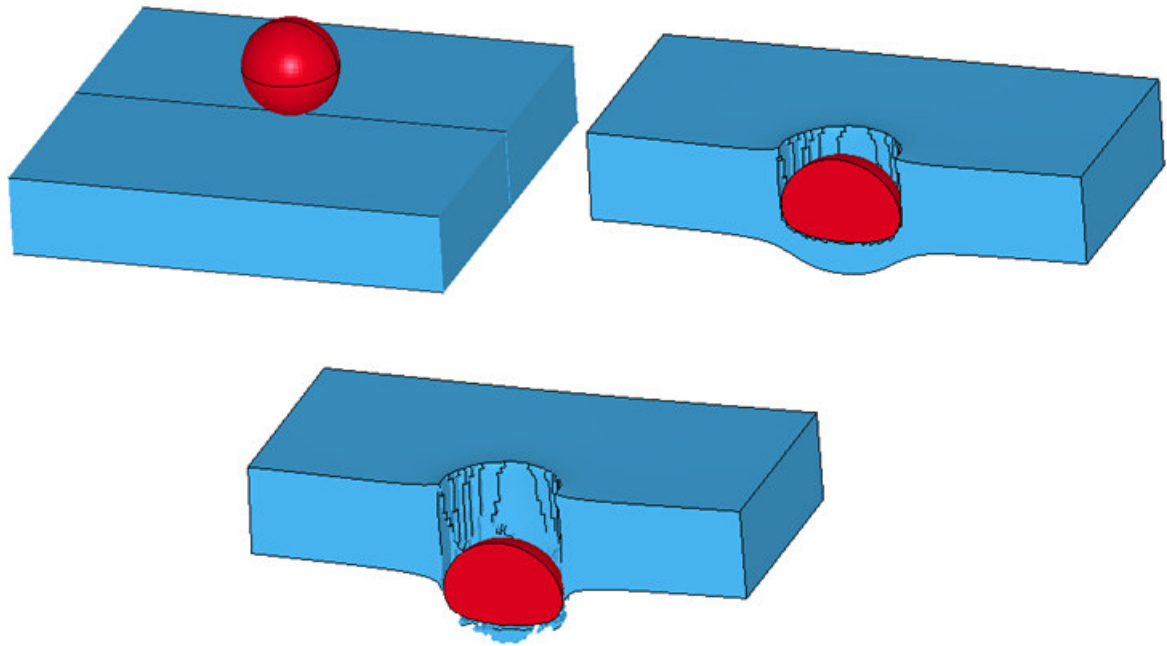


5.3 Моделирование пробития преграды конечной толщины осколками, имеющими форму шара

Материал преграды сталь 09Г2С. Толщина преграды 6,0 мм. Параметры осколка: Материал сталь 20, Масса осколка - 1.5 г, Скорость – 925 м/с,

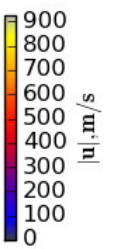
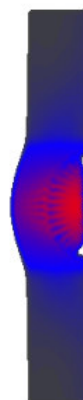
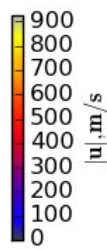
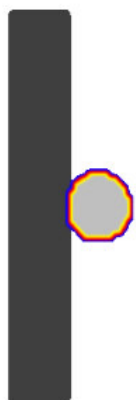
Расчет LS-DYNA - пробитие

Расчет SPH - пробитие

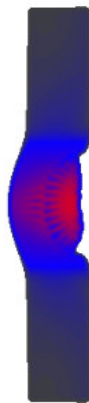


step 0, time 0.0
test3

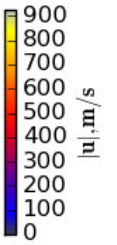
step 900, time 1.16865548678e-05
test3



step 1000, time 1.29764903157e-05
test3



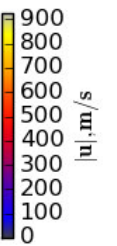
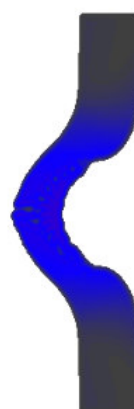
step 1900, time 2.46758562037e-05
test3



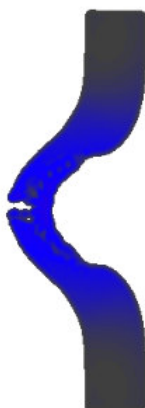
step 2900, time 3.76459914338e-05
test3



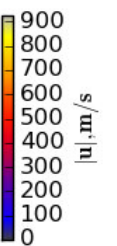
step 3400, time 4.41400945902e-05
test3



step 4300, time 5.58582328182e-05
test3



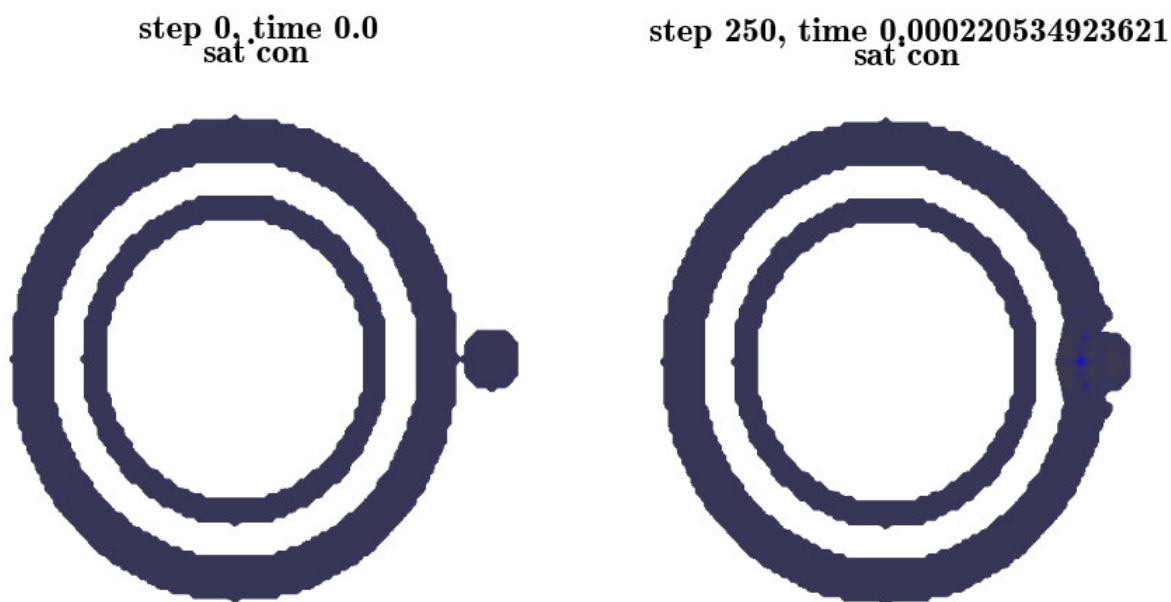
step 5000, time 6.50111477724e-05
test3



5.4 Столкновение космического мусора / метеорита со спутником

Рассматривается задача о высокоскоростном столкновении спутника и обломка космического мусора / метеорита. Обшивка спутника состоит из двух сферических слоев: внешнего радиусом 2.5 м и толщиной 0.4 м и внутреннего радиусом 1.7 м и толщиной 0.2 м. Обломок моделируется шаром радиусом 0.3 м. Обе обшивки изготовлены из пластика, обломок / метеорит предполагается полностью состоящим из железа. Скорость столкновения составляет 2 км/с.

По результатам расчетов получаем полное пробитие и вывод из строя спутника.



step 500, time 0.000417209604842
sat con

step 1000, time 0.000813617141702
sat con



5.5 Заключение

Существующий программный комплекс хорошо показал себя при моделировании высокоскоростного удара, получая те же результаты, что и в реальных экспериментах. Но при этом необходимо его улучшение, с точки зрения производительности, а также нужна модификация самого алгоритма (переменная длина сглаживания, другие методы аппроксимации функций) для уточнения результатов.

Остается открытым вопрос о моделировании удара со скоростями порядка 10 км/с, так как технические возможности пока не позволяют поставить этот вычислительный эксперимент.

6 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Johnson G.C., Cook W.H. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures// Presented at the 7 Int. Symposium on Ballistics, April 1983.

2. А.П. Потапов, И.Б. Петров. Моделирование высокоскоростных соударений методом сглаженных частиц (SPH)

3. Parshikov A. N., Medin S. A. Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms // Journal of Computational Physics. — 2002. — no. 180. — Pp. 358 – 382.

4. Parshikov A.N., Medin S.A., Loukashenkmo I.I., Milekhin V.A. Improvements in SPH Method by means of Interparticle Contact Algorithm and Analysis of Perforation Tests at Moderate Projectile Velocities // Int. J. Impact Eng. 2000. Vol. 24. P. 779

5. Monaghan J.J. An introduction to SPH. – Comput. Phys. Comm. 1988. V. 48. P. 89 – 96.

6. Monaghan J.J. SPH and Riemann Solvers // J. Comp. Phys. 1997. Vol. 136. P. 298

7. Зубов А. Д., Соколовская В.Л. Об одном варианте SPH-метода на основе задачи Римана // Препринт 1/2002. - Снежинск, 2002. - 16 с.

8. O'Brien J. F., Hodgins J. K. Animating fracture // Communications of the ACM. — 2000. — Vol. 43, no. 7. — Pp. 69 – 75.

9. LSTC, “LS-DYNA Keyword User’s Manual”, VOLUME I, Version 970 Beta, Livermore Software Technology Corporation, 2002.

10. Jeanquarter, R. and Lampert, S.: “Ballistic Resistance of layered Steel/Aramid Armor at Oblique Impact”, Proceedings of the 20th Int. Symp. on Ballistics

11. С.Д. Кошман, А.П. Потапов. Сравнение расчёта задачи деформируемого твёрдого тела улучшенным методом сглаженных частиц с экспериментом // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Часть VII. Управление и прикладная математика. Том 2. — М.: МФТИ, 2010. — с.36-38.

12. Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А. С. Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела //Ж.

