

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
Факультет Общей и Прикладной Физики  
Кафедра Информатики и Вычислительной Математики

## ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ПУТЕМ ПОЛНОВОЛНОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Выполнил:  
студент 4 курса группы 223  
*Котельников Сергей Алексеевич*  
Научный руководитель:  
к.ф.-м.н.  
*Фаворская Алена Владимировна*

Москва  
2016

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Сеточно-характеристический метод . . . . .	2
1.2	Метод конечных элементов. Введение. . . . .	3
1.3	Метод конечных элементов. Разрывный метод Галеркина. . . . .	4
<b>2</b>	<b>Определяющие уравнения</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Исследование одномерных аналогов семейства сеточно-характеристических методов на неструктурированных сетках</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Ультразвуковая дефектоскопия</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Модель</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Результат расчета</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Итог</b>	<b>21</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>22</b>

# 1 Введение

В мире существует огромное количество деталей, используемых в самых разнообразных областях человеческой деятельности. Находясь под нагрузками и воздействиями различного характера, детали неизбежно накапливают дефекты, в том числе те, которые невозможно обнаружить тактильно-визуальными методами, не разрушив деталь в диагностических целях. Думаю, не нужно убеждать читателя, что эксплуатация деталей с такими дефектами может привести к катастрофическим последствиям. Именно поэтому так важно работать над методами неразрушающего контроля, которые позволяют без нарушения целостности детали находить и распознавать внутренние повреждения детали. Математическому моделированию одного из этих методов, я имею ввиду ультразвуковую дефектоскопию, на примере стальных рельс посвящена часть моей дипломной работы.

Другая часть посвящена исследованию устойчивости одномерных аналогов семейства сеточно-характеристических методов на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках с интерполяцией от третьего до пятого порядков включительно, которые широко используются при численном решении гиперболических систем уравнений.

Вообще для приближенного решения гиперболических уравнений в частных производных существует широкий ряд различных методов [1, 2].

## 1.1 Сеточно-характеристический метод

Численное решение гиперболических систем уравнений может быть проведено с применением сеточно-характеристического метода, который начинается с применением расщепления по пространственным координатам. В результате мы получаем 3 одномерные гиперболические системы уравнений вида:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad (1.1)$$

где  $j = \{1, 2, 3\}$ . Каждая из этих систем обладает полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями, откуда каждую из систем можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Omega_j^{-1} \Lambda_j \Omega_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad (1.2)$$

где матрица  $\Omega_j$  - матрица, составленная из собственных векторов,  $\Lambda_j$  - диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_j$ . Делая замену переменных  $\mathbf{v} = \Omega_j \mathbf{u}$ , мы получим систему, распавшуюся

на независимые скалярные уравнения переноса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \Lambda_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j}. \quad (1.3)$$

После решения отдельных уравнений переноса можно восстановить в исходном виде решение  $\mathbf{u}^{n+1} = \Omega^{-1} \mathbf{v}^{n+1}$ .

Одномерные уравнения переноса можно решать с помощью обычных конечно-разностных схем либо методом характеристик:

$$u_t + \lambda u_x = 0, \sigma = \frac{\lambda \tau}{h}. \quad (1.4)$$

В качестве примера можно вспомнить монотонный набор сеточно-характеристических разностных схем, принцип построения которого основан на анализе пространства сеточных функций и корректном выборе схемы для каждого из возможных случаев для получения монотонного метода [3].

Можно более пристально изучить свойства характеристик гиперболического уравнения, с помощью характеристики опустить искомое значение функции на предыдущий временной слой, а затем воспользоваться той или иной интерполяцией для приближенного получения искомого значения функции на следующем временном слое.

## 1.2 Метод конечных элементов. Введение.

Помимо конечно-разностного подхода для получения численных методов для гиперболических систем, существует ряд иных подходов. Среди них метод конечных элементов, основу которого составляет представление решения в виде конечной линейной комбинации ограниченных базисных функций  $H_i(x)$ . Коэффициенты (степени свободы)  $u_i(t)$  при этих базисных функциях зависят от времени:

$$U(x, t) = \sum_i H_i(x) u_i(t). \quad (1.5)$$

Базисные функции обычно берут непрерывными и отличными от тождественно нуля на некотором носителе (конечном элементе). Соотношения, которые описывают эволюцию степеней свободы, получаются из следствий исходного уравнения, в частности при интегрировании произведения исходного уравнения и некоторых пробных функций, которые, вообще говоря, могут и не совпадать с  $\{H_i(x)\}$ .

### 1.3 Метод конечных элементов. Разрывный метод Галеркина.

Одной из вариаций метода конечных элементов является разрывный метод Галеркина [4–6]. Рассмотрим построение этого численного метода на примере системы уравнений акустики в 2D случае (будем рассматривать однородную среду):

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_y = 0 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p \\ v \\ \vartheta \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где  $\rho$  - плотность среды,  $K$  - модуль упругости. Переходим к инвариантам Римана  $\mathbf{A}^{\vec{n}} = \mathbf{A}n_x + \mathbf{B}n_y = (\mathbf{\Omega}^{\vec{n}})^{-1} \mathbf{\Lambda}^{\vec{n}} \mathbf{\Omega}^{\vec{n}}$ :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -Z & 0 & Z \\ n_x & n_y & n_x \\ n_y & n_x & n_y \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

- матрицы правых собственных векторов и собственных значений системы соответственно, где  $Z = \sqrt{K\rho}$ ,  $c = \sqrt{K/\rho}$ . Введем расчетную сетку, разобьем область интегрирования  $Q$  на ячейки  $\{R_h^{(k)}\}$ , где  $h = \max_k \sup_{\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in R_h^{(k)}} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Численное решение будем искать в пространстве функций, которые являются полиномами степени не выше  $s$  в каждой ячейке:

$$\mathbf{V}_s = \bigotimes_k \mathbf{V}_s^{(k)}; \mathbf{V}_s^{(k)} = \{f \in L^1 : f|_{R_h^{(k)}} \in P^s(R_h^{(k)}), f|_{Q \setminus R_h^{(k)}} = 0\}, \quad (1.9)$$

где  $P^s(R_h^{(k)})$  - пространство полиномов степени не выше  $s$ , носитель которых - ячейка  $R_h^{(k)}$ . Понятно, что функции, принадлежащие  $\mathbf{V}_s$ , допускают разрывы 1-ого рода на границах между ячейками. Хочется также отметить факт выбора нормы  $L^1$ , в которой будут вычисляться невязки и получаться соотношения на устойчивость, сходимости и т.д. Выбрав пространство базисных функций, мы ищем численное решение системы в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\vec{r}, t) = \sum_{k,i} H_i^{(k)}(\vec{r}) \mathbf{q}_i^{(k)}(t), \quad (1.10)$$

здесь  $\{H_i^{(k)}(\vec{r})\}$  - полный набор базисных функций в пространстве  $\mathbf{V}_s$  (индекс  $k$  пробегает по всем ячейкам в области интегрирования  $Q$ , индекс  $i$  - по всем базисным функциям пространства  $\mathbf{V}_s^{(k)}$  для конкретного индекса  $k$ , т.е. для конкретной ячейки  $R_h^{(k)}$ ),  $\mathbf{q}_i^{(k)}(t)$  - степени свободы. Домножим решаемую нами систему на

$$\int_{R_h^{(k)}} H_i^{(j)} d\vec{r} = \delta_{kj} \int_{R_h^{(k)}} H_i^{(j)} d\vec{r}:$$

$$\int_{R_h^{(k)}} H_i^{(k)} \mathbf{u}_t d\vec{r} + \int_{R_h^{(k)}} H_i^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{u}_x d\vec{r} + \int_{R_h^{(k)}} H_i^{(k)} \mathbf{B} \mathbf{u}_y d\vec{r} = 0 \quad (1.11)$$

$$\int_{R_h^{(k)}} H_i^{(k)} \mathbf{u}_t d\vec{r} + \int_{\partial R_h^{(k)}} H_i^{(k)} \mathbf{F} d\vec{r} - \int_{R_h^{(k)}} [(H_i^{(k)})_y \mathbf{B} \mathbf{u} + (H_i^{(k)})_x \mathbf{A} \mathbf{u}] d\vec{r} = 0 \quad (1.12)$$

В последнем равенстве введен поток  $\mathbf{F}$  при интегрировании по границе ячейки  $R_h^{(k)}$ . Как уже говорилось выше, решение на границе между ячейками может быть разрывным, и для того, чтобы рассчитать поток, в общем случае необходимо решать задачу эволюции для системы при начальных условиях - полиномиальных функциях в каждой ячейке, что есть очень сложная задача. Если для простых систем можно построить точное решение, то для более сложных (нелинейных, например) - практически невозможно.

Хочется также отметить, что в гиперболических задачах возмущения распространяются с конечной скоростью, а потому такая величина как поток в какой-то определенной точке границы в какой-то определенный момент времени имеет в тот же момент времени область зависимости в той же самой точке, а точнее на «правом и левом берегу» разрыва. Здесь имеется ввиду свойство решения  $\mathbf{u}^{in}(\vec{r}, t)$  и  $\mathbf{u}^{out}(\vec{r}, t)$  в точке  $(\vec{r}_0, t_0)$ .

Возвращаясь обратно к вопросу вычисления потока, мы воспользуемся приближенным решением задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Будем считать, что все пространство разбито прямой (плоскостью) - касательной к границе  $\partial R_h^{(k)}$  в точке  $\vec{r}_0$  - на два полупространства, начальные условия - *const* в каждом из них, а именно  $\mathbf{u}^{in}(\vec{r}_0, t_0)$  и  $\mathbf{u}^{out}(\vec{r}_0, t_0)$  соответственно. Такой способ вычисления потока является приближенным и обеспечивает отличие от точного значения потока на величину порядка  $O(h)$ , хотя реальный порядок сходимости может оказаться довольно высоким.

Так как гиперболическая система акустики инвариантна относительно поворотов системы координат в пространстве, то повернем её так, чтобы  $Ox \uparrow \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  - вектор нормали к касательной прямой (плоскости) в  $\vec{r}_0$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_{\vec{n}} \mathbf{u}_{\vec{n}} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{T}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

где  $n_x$  и  $n_y$  - направляющие косинусы нормали. Но тогда поток  $\mathbf{F}$  в точке  $\vec{r}_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}((\vec{r}_0)_j, t_0) = & \frac{1}{2} \mathbf{T}_{\vec{n}((\vec{r}_0)_j)}(A + |A|)(\mathbf{T}_{\vec{n}((\vec{r}_0)_j)})^{-1} \sum_i \mathbf{q}_i^k(t_0) H_i^k((\vec{r}_0)_j) + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{T}_{\vec{n}((\vec{r}_0)_j)}(A - |A|)(\mathbf{T}_{\vec{n}((\vec{r}_0)_j)})^{-1} \sum_i \mathbf{q}_i^{kj}(t_0) H_i^{kj}((\vec{r}_0)_j), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $(\vec{r}_0)_j$  пробегает по все точкам границы (мы её назовем  $(\partial R_h^{(k)})_j$ ) между  $R_h^k$  и соседом  $R_h^{(k)_j}$ ,  $j$  пробегает по всем соседям  $k$ -ой ячейки под номерами  $(k)_j$  соответственно. Теперь подставим выражение для потока в уравнение 1.12:

$$\begin{aligned} & \sum_l \left[ \int_{R_h^{(k)}} H_i^{(k)} H_l^{(k)} d\vec{r} \right] (\mathbf{q}_l^k)_t + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{lj} \int_{(\partial R_h^{(k)})_j} H_l^{(k)} [\mathbf{T}_{\vec{n}}(A + |A|)(\mathbf{T}_{\vec{n}})^{-1} \mathbf{q}_l^k H_l^k + \mathbf{T}_{\vec{n}}(A - |A|)(\mathbf{T}_{\vec{n}})^{-1} \mathbf{q}_l^{kj} H_l^{kj}] d\vec{r} - \\ & - \sum_l \left[ \int_{R_h^{(k)}} (\mathbf{B}(H_i^{(k)})_y H_l^{(k)} + \mathbf{A}(H_i^{(k)})_x H_l^{(k)}) d\vec{r} \right] \mathbf{q}_l^k = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

## 2 Определяющие уравнения

Для начала рассмотрим нестационарную трехмерную эйлерову систему уравнений динамики твердого деформируемого изотропного тела (по сути уравнения, сводящиеся к законам сохранения массы и импульса, с добавлением к ним закона Гука) [7]. При выборе соответствующих переменных такая система уравнений в эйлеровой системе координат принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \hat{\mathbf{P}}) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv \frac{\operatorname{tr} \hat{\mathbf{P}}}{3} \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{S}} = -p \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{S}}; \operatorname{tr} \hat{\mathbf{S}} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\hat{\mathbf{P}} = [P_{ij}]$ ;  $P_{ij} = P_{ji}$  - симметричный тензор напряжения Коши,  $\operatorname{tr} \hat{\mathbf{P}} = \sum_i P_i^i$ ,  $-p \hat{\mathbf{I}}$  - шаровая часть напряжений в сплошной среде,  $\hat{\mathbf{S}}$  - девиаторная часть напряжений,  $p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{P}}$  - давление,  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$  - плотность,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\vec{r}, t)$  - скорость движения среды,  $\hat{\mathbf{I}}$  - метрический тензор. Теперь воспользуемся законом Гука - экспериментальным соотношением между напряжением в материале  $\hat{\mathbf{P}}$  и его малыми деформациями (линейно-упругий случай):

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{X}}, \text{ а точнее } P_{ij} = C_{ijpq} X_{pq}, \quad (2.4)$$

где  $\hat{\mathbf{C}}$  - тензор упругих постоянных, вид которого определяется реологией среды, а

$$\hat{\mathbf{X}} = X_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T) = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{d}$  - вектор смещения. Используя симметрию тензора  $\hat{\mathbf{C}}$  и условия изотропии, можно получить, что из  $3^4 = 81$  компонентов тензора  $\hat{\mathbf{C}}$  только два будут независимы (Хотя в отсутствии изотропии число независимых компонентов может достигать 21). В этом случае тензор упругих постоянных принимает следующий вид:

$$C_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}), \quad (2.6)$$

откуда выражение для тензора напряжения можно выразить следующим образом:

$$\hat{\mathbf{P}} = [P_{ij}] = \lambda \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{X}}) \hat{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{X}} = [\lambda \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{X}}) \delta_{ij} + 2\mu X_{ij}], \quad (2.7)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  - это, так называемые, коэффициенты Ламэ. Последний из них также называется модулем сдвига. Заметим, что вместо  $\lambda$  и  $\mu$  могут использоваться и другие

упругие коэффициенты, в частности, модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}; \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.8)$$

Рассмотрим систему из уравнений 2.2 и 2.7, из первого векторного уравнения имеем три независимых скалярных уравнения, из второго векторного уравнения - шесть независимых скалярных уравнения. Вектор искомых функций, который состоит из девяти компонент, имеет вид:

$$\mathbf{u} = \{v_1, v_2, v_3, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{22}, P_{23}, P_{33}\}. \quad (2.9)$$

Таким образом система для линейно-упругой изотропной среды может быть записана в привычном матричном виде [8]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad (2.10)$$

где матрицы размера  $9 \times 9$  –  $\mathbf{A}_i$ :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.11)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Данная система уравнений является гиперболической, что означает наличие у каждой из вышеприведенных матриц набора из 9 вещественных собственных чисел и базиса из соответствующих собственных векторов. Такая форма записи системы уравнений является привычной, каноничной записью, принятой в вычислительной математике для построения разностных схем.

### 3 Исследование одномерных аналогов семейства сеточно-характеристических методов на неструктурированных сетках

При численном решении задач сейсмической разведки [9], сеймики и при численном исследовании анизотропных композитных материалов [10] широко используются сеточно-характеристические методы [1, 9–11], в том числе на неструктурированных треугольных [12] и тетраэдральных сетках [1, 13, 14] с интерполяцией от первого до пятого порядков включительно [15]. Данные методы в одномерном случае сводятся к группам одномерных разностных схем, проведено их исследование на устойчивость. Для проведения дальнейших исследований был реализован программный пакет, использующий численные методы, являющиеся одномерными аналогами семейства численных методов на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. Для начала сформулируем модельную задачу, которую численно собираемся решать:

$$u(x, t) : x \in [0, L], t \in [0, T], u_t - \lambda u_x = 0, \lambda > 0; \quad (3.1)$$

т.е. мы ищем функцию времени и координаты на стандартной области интегрирования, которая удовлетворяет уравнению переноса. Граничные условия возьмем периодическими, а в качестве начального условия возьмем некоторое синусоидальное возмущение на фоне вакуума, что весьма характерно для задач с гиперболической системой уравнений - распространение некоторого возмущения-волны

с конечной скоростью а пространстве:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \varphi = \begin{cases} 1 - \cos(\frac{8\pi x}{L}), x \in [0, \frac{L}{4}] \\ 0, x \in [\frac{L}{4}, L] \end{cases}. \quad (3.2)$$

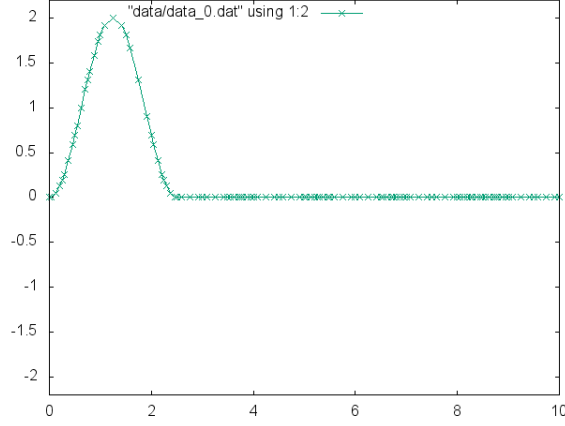


Рис. 1: Начальное условие

Поскольку в правой части уравнения переноса стоит 0, то значение функции вдоль характеристики не меняется:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \Rightarrow x(t, C) = \lambda t + C \Rightarrow \frac{du(x(t, C), t)}{dt} = 0 \Rightarrow u(x(t, C), t) = \text{const}(C) \quad (3.3)$$

Введем в области  $[0, L] \times [0, T]$  расчетную сетку равномерную по времени и не обязательно равномерную по пространственной координате. Введенные пространственные узлы (красные точки на рис. 2) и отрезки между ними ( $R_i$ ) мы назовем основными. Каждый основной отрезок в свою очередь мы разделим (не обязательно равномерно) на  $N$  вспомогательных отрезков с помощью  $N - 1$  вспомогательного узла (желтые точки на рис. 2).

Как мы уже установили для уравнения переноса с нулевой правой частью, значение функции  $u(x(t), t)$  не меняется вдоль характеристики  $x(t) : \frac{dx}{dt} = \lambda$ , а потому значения искомой функции в основных (красные точки) и вспомогательных (желтые точки) узлах переносятся с  $n + 1$  временного слоя без изменения вдоль характеристик-прямых на  $n$  временной слой. Таким образом для нахождения значений функции на следующем,  $n + 1$  временном слое мы должны, зная значения функции в узлах на предыдущем,  $n$  временном слое, найти значение функции в точке пересечения (зеленые точки на рис. 2) характеристики, идущей из искомого узла, с временной изолинией  $n$  слоя (Нас интересуют пока только двухслойные явные схемы).

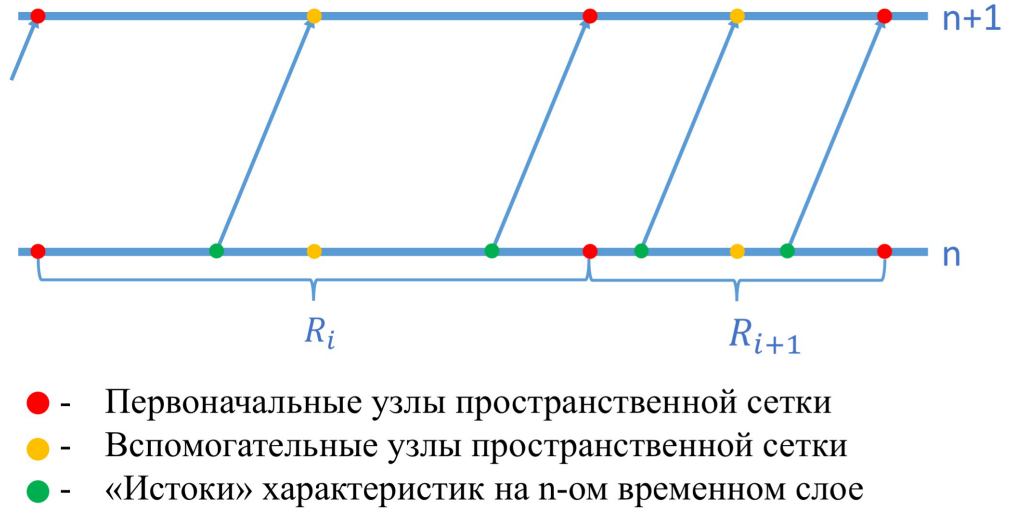


Рис. 2: Два временных слоя одномерной расчетной сетки, характеристики

Для приближенного решения этой задачи мы воспользуемся интерполяцией. Пусть  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N+1}\}$  - некий набор точек;  $u : [x_0, x_{N+1}] \rightarrow \mathbb{R} : u(x_i) = u_i (i = 0 \dots \bar{N} + 1)$  - для функции  $u(x)$  известно  $N+1$  значений в  $N+1$  точках пространства соответственно. Эту функцию мы приближенно заменим многочленом порядка  $N$ :  $u(x) \approx \widetilde{P}_N(x) : \widetilde{P}_N(x_i) = u(x_i) (i = 0 \dots \bar{N} + 1)$ . Пусть  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)\}$  - базис в пространстве многочленов порядка  $N$ , тогда  $\widetilde{P}_N(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_N P_N(x)$ .

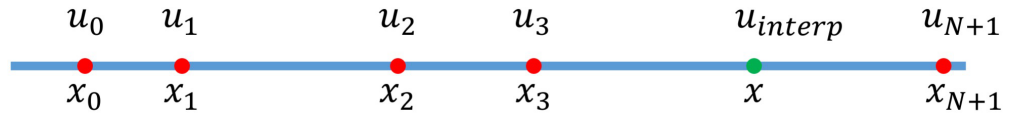
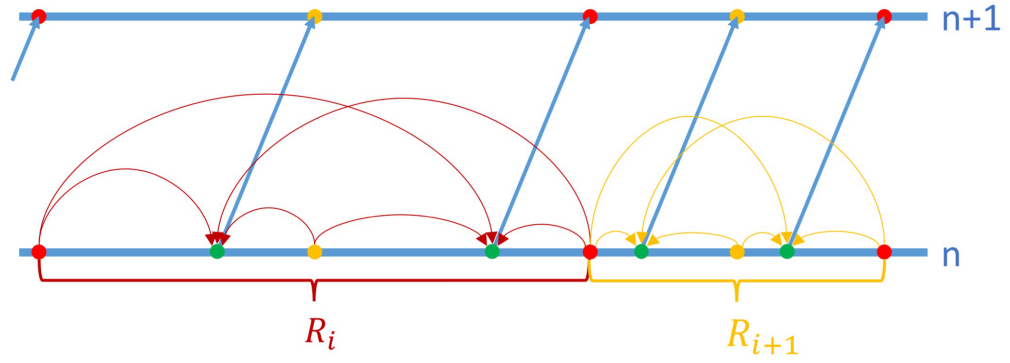


Рис. 3: Интерполяция на одномерной расчетной сетке

Для нахождения вектора  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_N)^T$  мы составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u(x_0) = a_0 P_0(x_0) + a_1 P_1(x_0) + \dots + a_N P_N(x_0) \\ u(x_1) = a_0 P_0(x_1) + a_1 P_1(x_1) + \dots + a_N P_N(x_1) \\ \dots \\ u(x_N) = a_0 P_0(x_N) + a_1 P_1(x_N) + \dots + a_N P_N(x_N) \end{cases} \Rightarrow \vec{a}, \quad (3.4)$$

отсюда несложно узнать значение функции  $u_{interp}$  в нужной точке. Здесь также хочется уточнить, что узлы для интерполяции мы будем брать с того основного отрезка  $R_i$ , на который «упала» соответствующая характеристика, т.е. основные узлы, формирующие основной отрезок  $R_i$ , и вспомогательные узлы, находящиеся внутри основного отрезка  $R_i$ .



- - Первоначальные узлы пространственной сетки
- - Вспомогательные узлы пространственной сетки
- - «Истоки» характеристик на  $n$ -ом временном слое

Рис. 4: Два временных слоя одномерной расчетной сетки, характеристики

Аналогично условию устойчивости Куранта мы выберем шаг по времени следующим образом:

$$T = k \frac{\min_{i \in T}(T_i)}{\lambda}, \quad (3.5)$$

где  $k < 1$ ,  $T = \{T_i\}$  - множество всех отрезков между основными и/или вспомогательными узлами. Отсюда сразу становится понятно, что характеристика выходящая из вспомогательного узла внутри основного отрезка  $R_i$  на  $n + 1$  временном слое падает на тот же самый отрезок  $R_i$ , но только уже на  $n$ -ом временном слое. Характеристика, выходящая из основного узла, падает на левый по отношению к нему основной отрезок. Расчеты были проведены для значений  $k = \{0.1; 0.3; 0.6; 0.9\}$ . Расчеты останавливались, когда осцилляции достигали 0.1 от первоначального синуса (см. рис. 5).

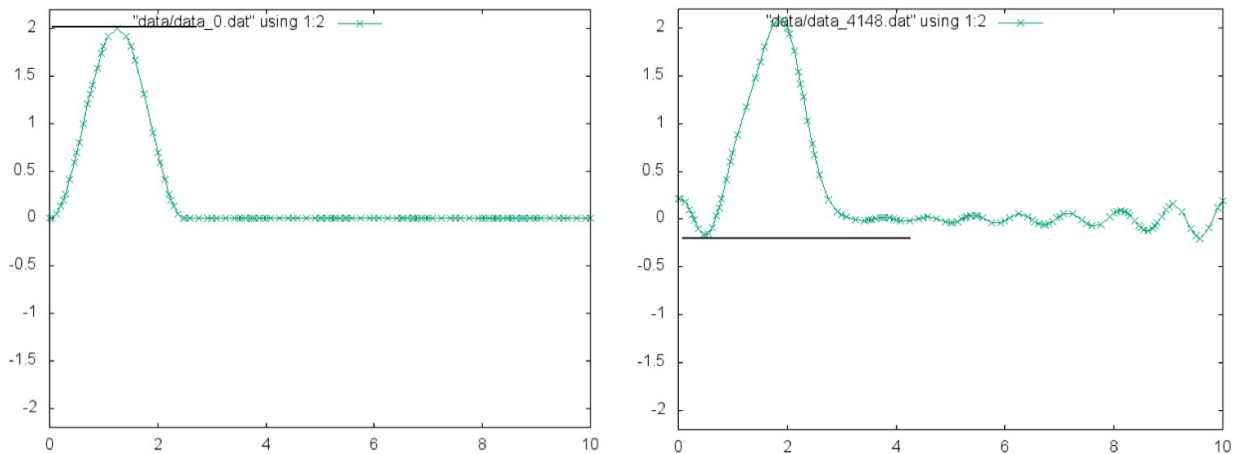
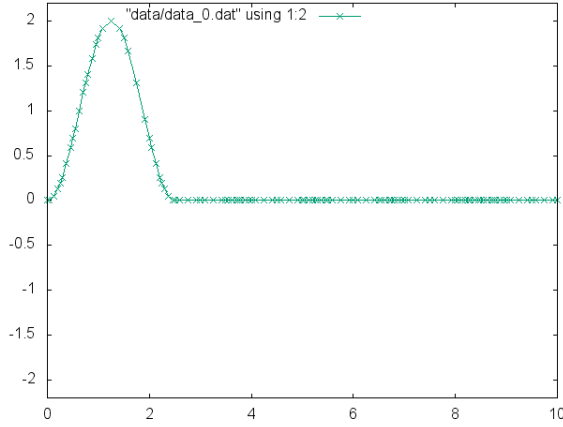


Рис. 5: Критерий остановки расчета

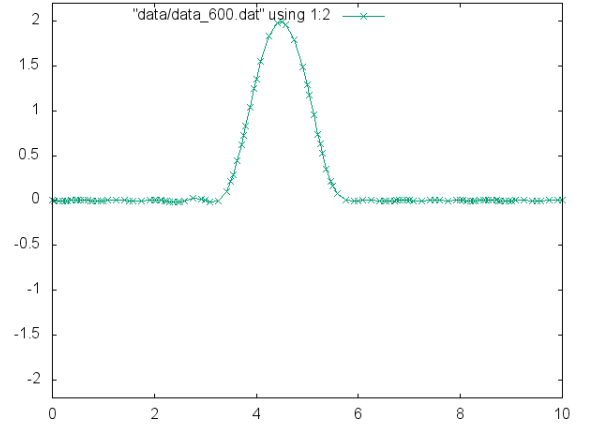
Мы рассмотрим 2 варианта: 1) В качестве базиса возьмем:  $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$ ,

а распределение вспомогательных узлов будет равномерным т. е. мы имеем равномерное распределение пространственных точек на отрезке  $R_i$ , по которым мы будем интерполировать. 2) Базис в пространстве многочленов степени  $N$ :  $\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots\}$  на отрезке  $[-1, 1]$  (многочлены Лежандра), из которого затем благодаря линейному отображению  $L : [-1, 1] \rightarrow R_i$  получаем желаемый нами базис. Точки, по которым мы будем интерполировать, так же получаются благодаря линейному отображению  $L$  корней  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\} \in [-1, 1] : \frac{dP_N(x)}{dx} = 0$  на отрезок  $R_i$ . Расчеты были проведены для  $N = \{3, 4, 5\}$ .

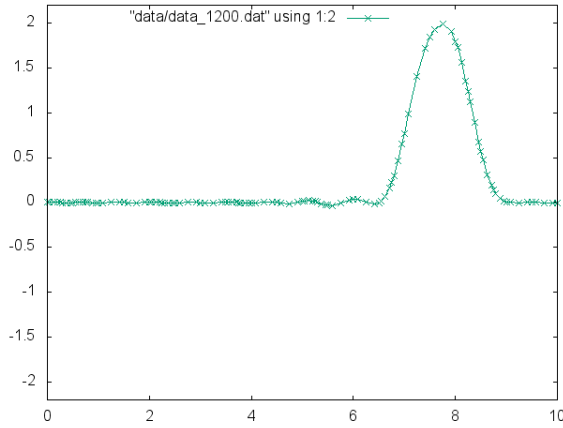
## 4 Результаты



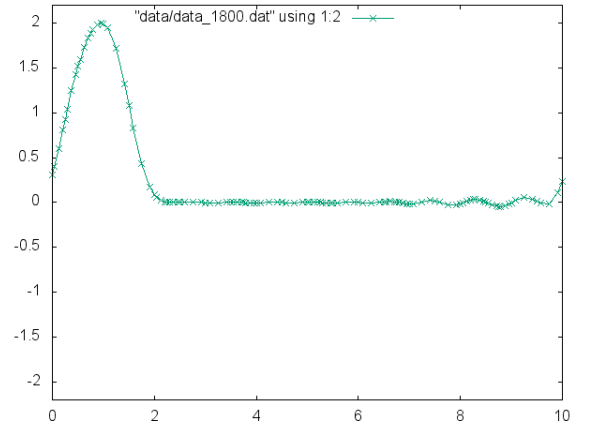
(a) T=0



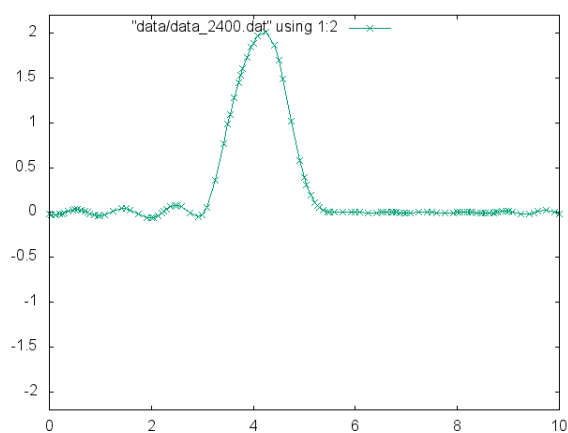
(b) T=13.59785



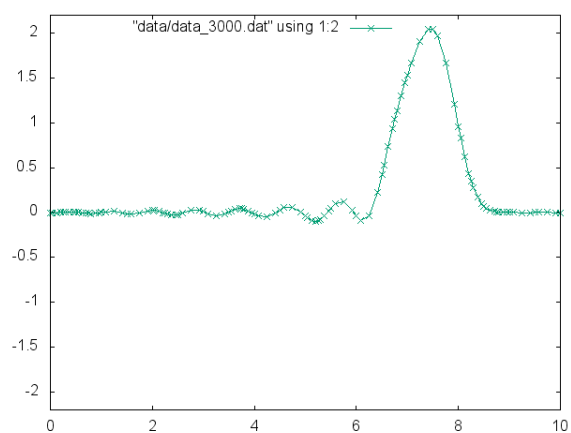
(a) T=27.1957



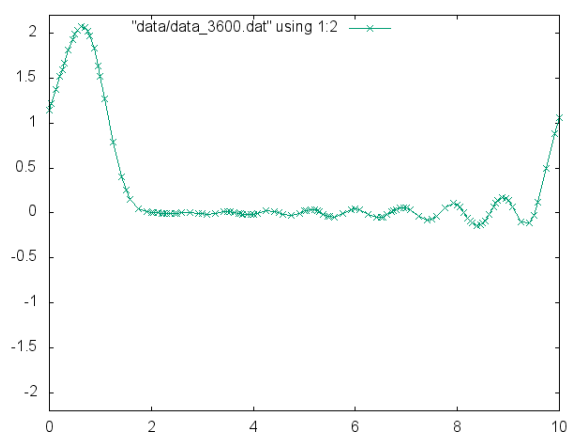
(b) T=40.79355



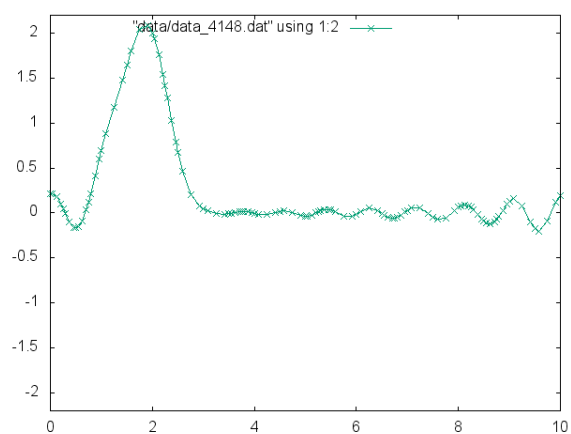
(a)  $T=54.3914$



(b)  $T=67.98925$



(a)  $T=81.5871$



(b)  $T=94.679887$

Рис. 9: Результаты для многочленов Лежандра  $N=4$   $k=0.9$

Простая интерполяция			
	3	4	5
0.1	11.232884	13.375	6
0.3	12.775	14.1375	6.45
0.6	16.65	15.5625	7.38
0.9	24.45	18.50625	7.785
Интерполяция «Лежандра»			
	3	4	5
0.1	17.21972	47.033715	
0.3	21.267954	59.0779	
0.6	29.85048	88.685024	
0.9	48.009136	161.153948	

Табл. 1: Время до остановки

Простая интерполяция			
	3	4	5
0.1	1348	2140	1200
0.3	511	754	430
0.6	333	415	246
0.9	326	329	173
Интерполяция «Лежандра»			
	3	4	5
0.1	2492	10895	
0.3	1026	4562	
0.6	720	3424	
0.9	772	4148	

Табл. 2: Количество шагов до остановки

## 5 Ультразвуковая дефектоскопия

За последние полтора века железная дорога стала одним из основных способов для транспортировки людей и грузов, а её основной элемент - стальные рельсы - в процессе эксплуатации постоянно находятся под воздействием динамической нагрузки и природно-климатических факторов, в результате чего в рельсах накапливаются различные дефекты и деформации, таким образом надежность рельсов снижается, а вероятность аварийных ситуаций повышается. Понятно, что среди всего разнообразия повреждений рельса существуют дефекты, которые невозможно обнаружить визуально-тактильными методами, и для этого случая были разработаны методы неразрушающего контроля, такие как ультразвуковой метод, магнито-динамический метод, метод вихревых токов и так далее [16–18].

В данной работе представлены результаты численного моделирования процесса ультразвуковой дефектоскопии участка железнодорожного рельса с 4 различными типами повреждений. На рис. 10 приведены фотографии четырех типов повреждений, возникающих в рельсах. Данные взяты из книги [19], где приведен более подробный перечень дефектов и повреждений рельсов. На рис. 10а изображена поперечная трещина в головке. Код дефекта 20 1-2. На рис. 10b представлено вертикальное расслоение металла. Код дефекта 30в 1-2. На рис. 10с изображено горизонтальное расслоение металла. Код дефекта 30г 1-2. На рис. 10d представлено расслоение шейки рельса. Код дефекта 50 1-2.



(a) Поперечная трещина в головке



(b) Вертикальное расслоение металла



(c) Горизонтальное расслоение металла



(d) Расслоение шейки рельса

Рис. 10: Типы дефектов, возникающих в рельсах

## 6 Модель

На рис. 11 приведена схема численного эксперимента со всеми размерами модели. Здесь указано расположение анализатора и области приложения анализирующего импульса. Модель рельса представляет собой совокупность трех параллелепипедов с регулярной прямоугольной расчетной сеткой в каждом из них.

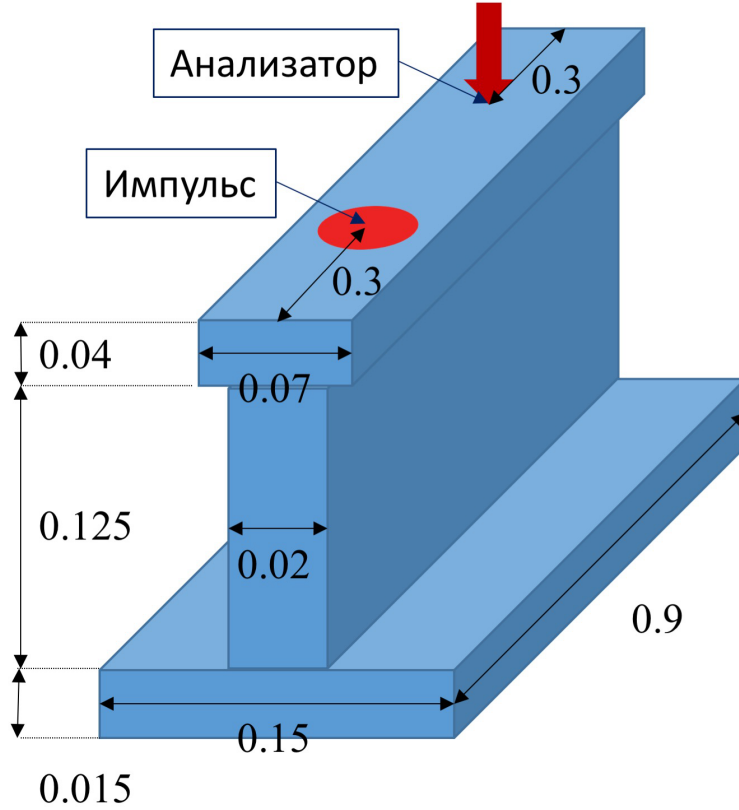


Рис. 11: Схема численного эксперимента

Шаг по пространству -  $10^{-3}$ , шаг по времени -  $15 \cdot 10^{-8}$ . Скорости звука и плотность:  $c_1 = 6250.1282$ ,  $c_2 = 3188.5210$ ,  $\rho = 7800.0$ .

Теперь опишем параметры анализирующего импульса. Время действия анализирующего импульса -  $2 \cdot 10^{-5}$ . График анализирующего импульса - синус с нулевой начальной фазой, длительность импульса соответствует 10 периодам синуса, магнитуа импульса:  $(0, 0, -1)$ . Анализатор расположен в вертикальной плоскости симметрии вдоль рельса прямо на поверхности головки рельса. То же самое можно сказать о центре окружности - области приложения анализирующего импульса. В расчете используется сеточно-характеристический метод [20] (схема Русанова 3 порядка точности):

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(\Delta_0 + \Delta_1) + \frac{\sigma^2}{2}(\Delta_0 - \Delta_1) + \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{6}(\Delta_{-1} - 2\Delta_0 + \Delta_1), \quad (6.1)$$

где  $\sigma = \frac{\lambda \tau}{h}$ ,  $\Delta_0 = u_{m-1}^n - u_m^n$ ,  $\Delta_{-1} = u_{m-2}^n - u_{m-1}^n$ ,  $\Delta_1 = u_m^n - u_{m+1}^n$ . Тут нужно как-то обобщить. Рассмотрим постановку граничных условий. На краях расчетной области ставятся условия свободной поверхности, что соответствует:

$$p_{(ijk)}^{k+1} = 0, \quad (6.2)$$

где  $p$  - давление, а набор индексов  $(ijk)$  пробегает все граничные узлы расчетной сетки.

С торцов рельса мы ставим неотражающие граничные условия:

$$\frac{\partial R}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (6.3)$$

где  $\vec{n}$  - это направление нормали к границе, а  $R$  - соответствующий линеаризованный инвариант Римана, для которого не хватает граничного условия. Модель трещин - бесконечно тонкая газонасыщенная трещина. Суть этой модели: граничные условия свободной поверхности по обе стороны моделируемой трещины.

## 7 Результат расчета

На рис. 12–16 приведены результаты численного моделирования распространения упругих волн в рельсе в различные моменты времени (a–d). На рис. 12–16 цветом показан модуль скорости.

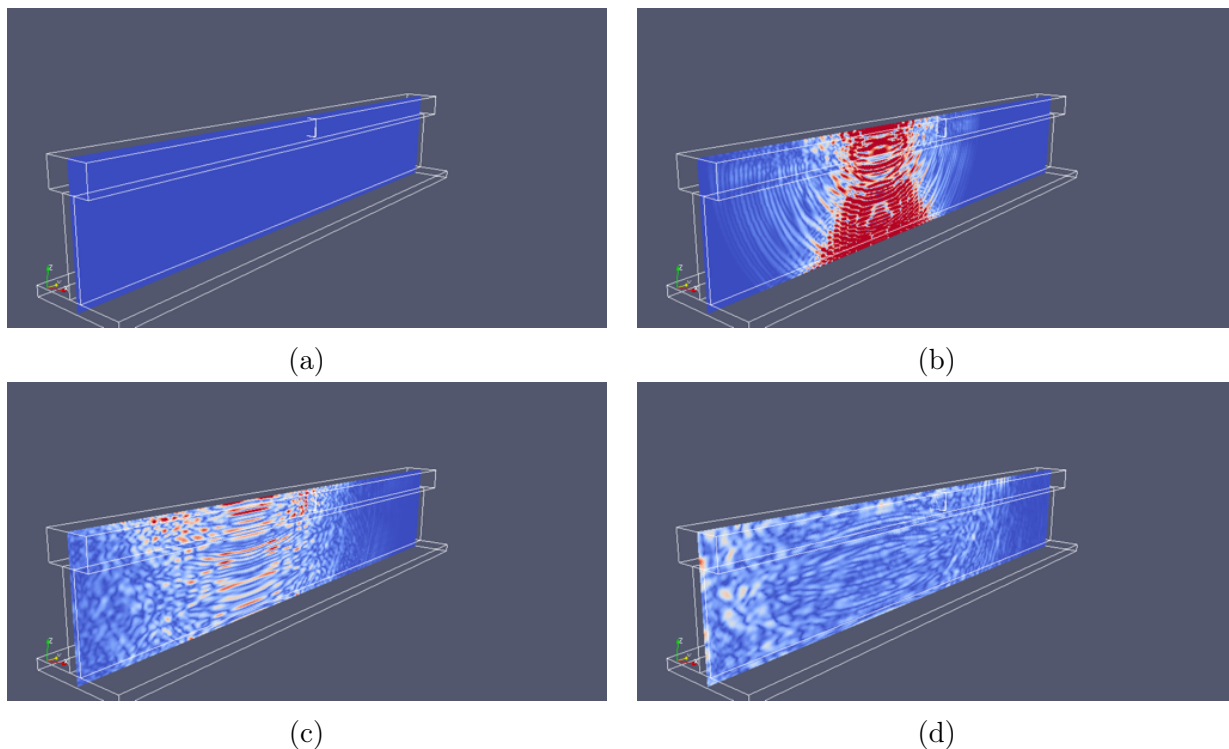


Рис. 12: Распространение упругих волн в рельсе с поперечной трещиной в головке

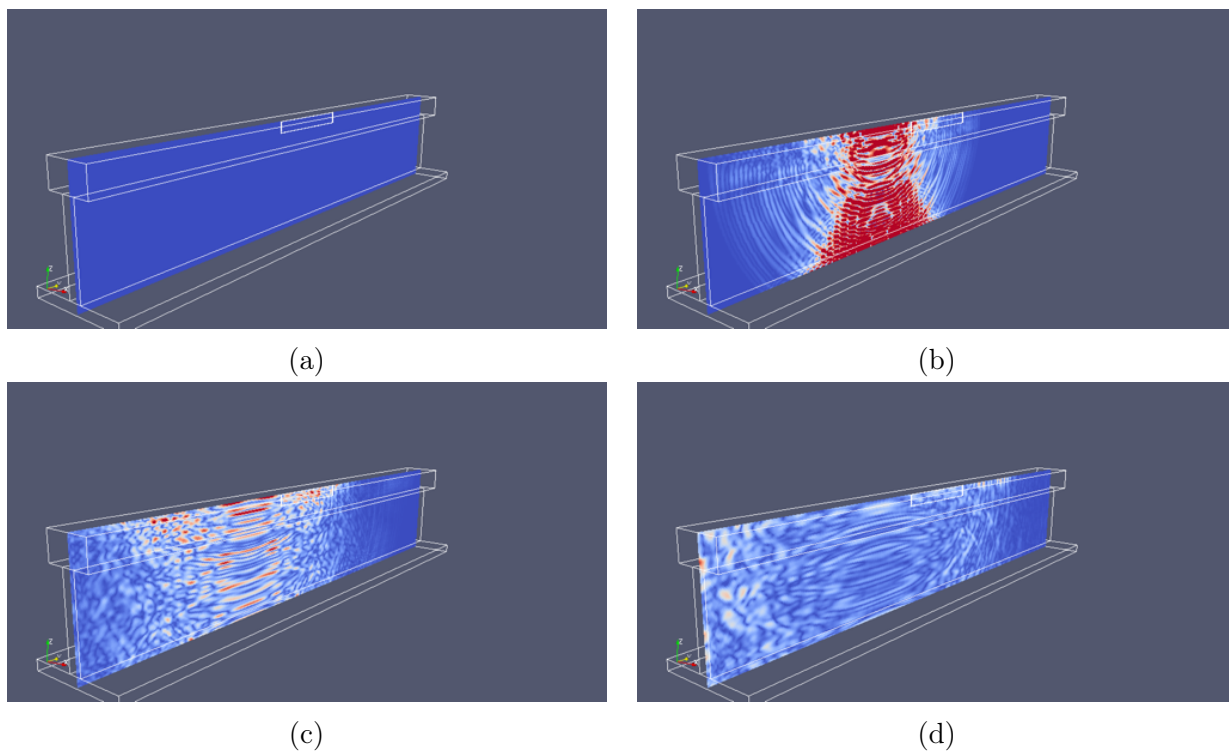


Рис. 13: Распространение упругих волн в рельсе с вертикальным расслоением металла

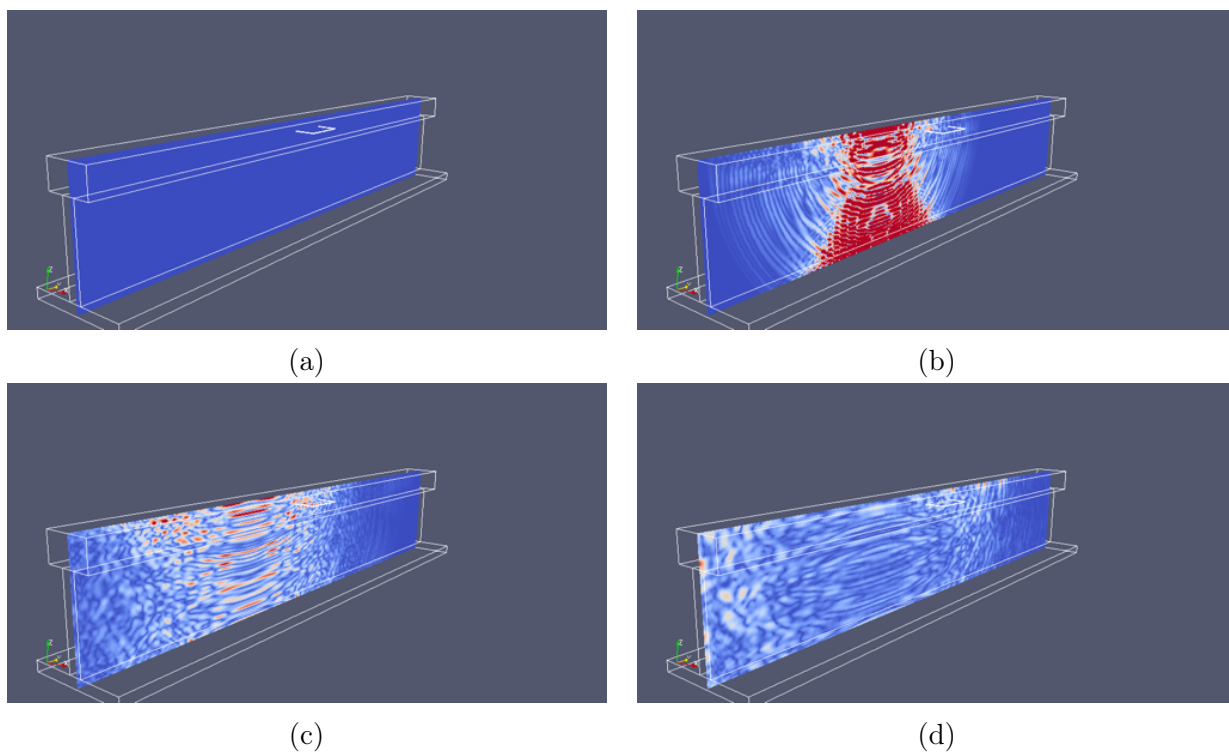


Рис. 14: Распространение упругих волн в рельсе с горизонтальным расслоением металла

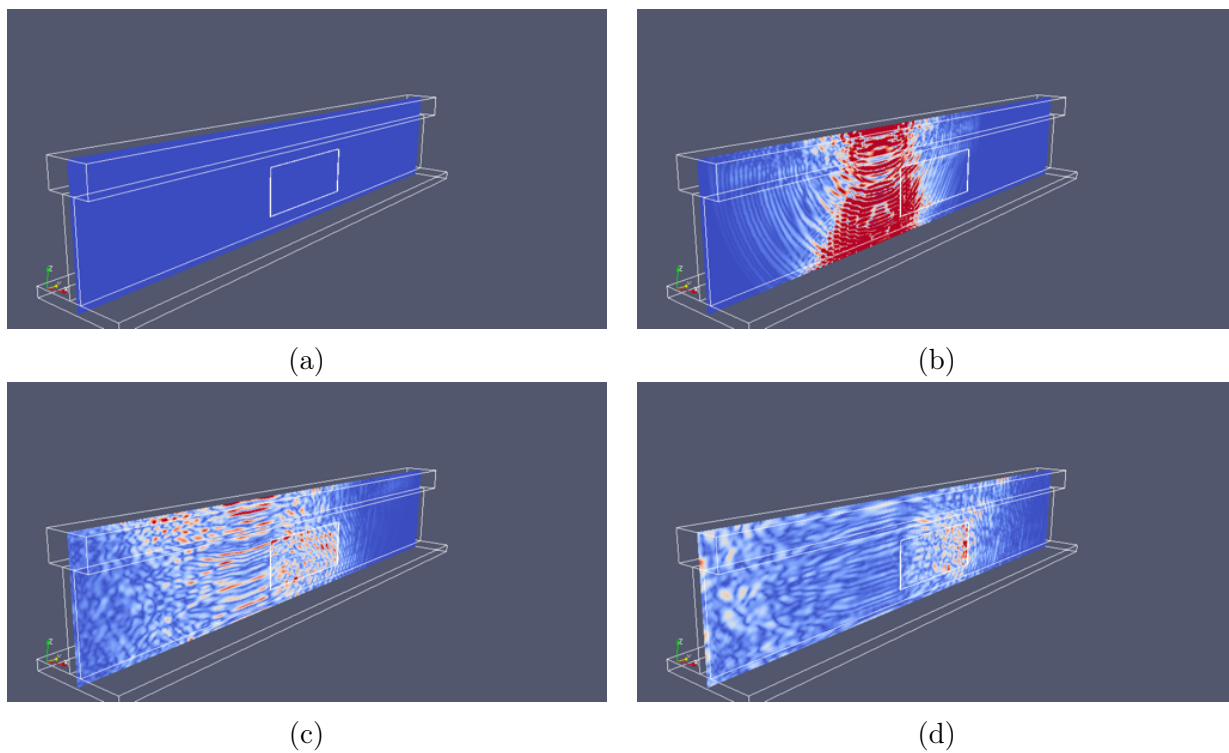


Рис. 15: Распространение упругих волн в рельсе с расслоением шейки рельса

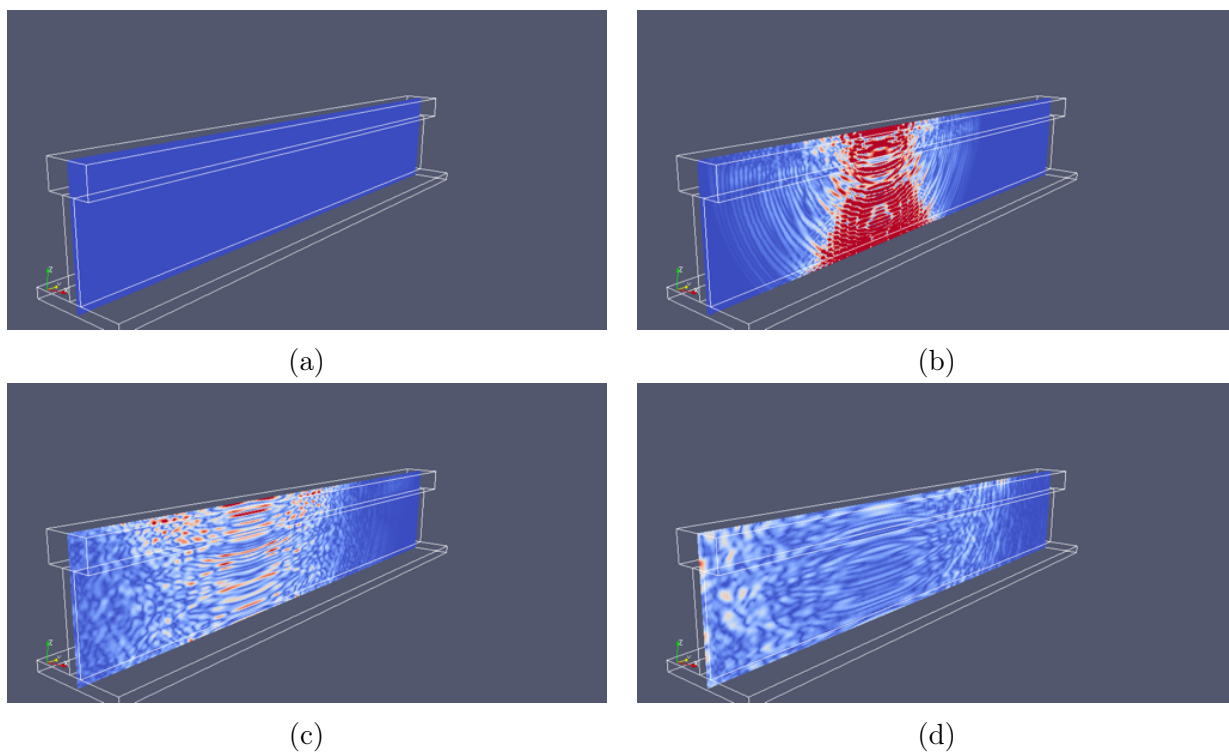


Рис. 16: Распространение упругих волн в неповрежденном рельсе



Рис. 17: Единица времени на графике:  $3.75 \cdot 10^{-6}$  сек.

## 8 Итог

Во-первых, стоит заметить кардинальную разницу во времени устойчивости для обычной интерполяции и для интерполяции с многочленами Лежандра на Фекете точках. Это дает надежду на получение интересных результатов при использовании многочленов Якоби и Чебышева, а впоследствии и при обобщении на трехмерный случай.

Во-вторых, моделирование ультразвуковой дефектоскопии проходило при выборе частоты на нижней кромке ультразвука (0.5 MHz). В этом случае нам понадобилось 0.5 Gb оперативной памяти для хранения сетки (9 double для каждого узла). Для случая, например, уже 10 MHz нам потребуется около 4.5 Tb. В этом состоит большая проблема.

## Список литературы

- [1] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 г., 608 с.
- [2] Холодов А.С. Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. 2008. т. VII-I/Ч.2. С.141-174.
- [3] Холодов АС, Холодов ЯА. О критериях монотонности разностных схем для уравнения гиперболического типа. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, 46(9):1560-1588.
- [4] Миряха ВА, Санников АВ, Петров ИБ. Численное моделирование волновых процессов в гидроупругих задачах разрывным методом Галеркина на неструктурированных треугольных сетках. Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2014, 10:16-20.
- [5] Hesthaven JS, Warburton T. Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2008, vol. 54.
- [6] Kaser M, Dumbser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. Geophysical Journal International, 2006, 66(2):855-877.
- [7] Новацкий ВК. Теория упругости. М., Мир, 1975, 872 с.
- [8] Петров ИБ, Холодов АС. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, 24(5):722-739.
- [9] Шерифф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка – М.: Мир, 1987.
- [10] Петров ИБ., Фаворская А.В., Васюков А.В., Ермаков А.С., Беклемышева К.А., Казаков А.О., Новиков А.В. О численном моделировании волновых процессов в анизотропных средах . // Журнал "Доклады Академии Наук". - 2014. - Т. 495. - No 3. - С. 285 - 287.
- [11] Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование . 1990. т.2. No1., С.11-29.

- [12] Квасов И.Е., Петров И.Б. Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в задачах сейсморазведки на высокопроизводительных ЭВМ // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2012. т. 52. No 2. С. 330-341.
- [13] Petrov I.B., Favorskaya A.V., Muratov M.V., Sannikov A.V. Grid Characteristic Method on Unstructured Tetrahedral Meshes. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2014. - Vol. 54. - No. 5 - pp. 837 - 847.
- [14] Петров И.Б., Фаворская А.В., Муратов М.В., Бирюков В.А., Санников А.В. О сеточно- характеристическом методе на неструктурированных тетраэдральных сетках. // Журнал "Доклады Академии Наук". - 2014. - Т. 459. - No 4. - с. 406 - 408.
- [15] Петров И.Б., Фаворская А.В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. // Журнал Информационные технологии. 2011 г. No9. С. 30 – 32.
- [16] Cannon DF, Edel K-O, Grassie SL, Sawley K. Rail defects: an overview. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2003, 26(10):865-886.
- [17] Papaelias MPh, Roberts C, Davis CL. A review on non-destructive evaluation of rails: State-of-the-art and future development. Journal of Rail and Rapid Transit, 2008, 222(4):367-384.
- [18] Петров ИБ, Голубев ВИ, Миряха ВА, Хохлов НИ, Фаворская АВ, Санников АВ, Беклемышева КА. Динамическая диагностика элементов пути. Техника железных дорог, 2013, 4:64-77.
- [19] Грицык В.И. Дефекты рельсов железнодорожного пути. – М.: Маршрут, 2005 г., 80 с.
- [20] Петров И. Б., Фаворская А. В., Миряха В. А., Хохлов Н. И., Голубев В. И., Санников А. В. Мониторинг состояния подвижного состава с помощью высокопроизводительных вычислительных систем и высокоточных вычислительных методов. // Математическое моделирование. - 2014 - Т. 26 - No 7.- С. 19 - 32.