Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики Кафедра информатики и вычислительной математики

Гилязутдинов Руслан Ильмирович

Численное моделирование динамических процессов в трехмерных трещиноватых слоистых средах

010900 — Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель: к.ф.-м.н Голубев Василий Иванович

Содержание

1	Вве	дение	3			
2	2 Постановка задачи					
3	Ma	гематическая модель	7			
	3.1	Уравнения механики деформируемого твёрдого тела	7			
	3.2	Граничные условия	9			
4	Чис	сленный метод	11			
	4.1	Метод расщепления по координатам	11			
	4.2	Решение одномерной системы уравнений гиперболического типа	11			
5	Рез	ультаты	13			
	5.1	Модель 1	13			
	5.2	Модель 2	15			
	5.3	Модель 3	17			
	5.4	Модель 4	18			
	5.5	Модель 5	19			
6	Зак	лючение	21			
C	Список литературы					

1 Введение

На текущий момент нефть и газ считаются без преувеличения самыми полезными и ценными ресурсами, на которые приходится около 60% потребляемой энергии. Несмотря на активное развитие альтернативных источников энергии(геотермальные, ветряные, солнечные, гидроэнергетические, биотопливные), традиционные будут иметь огромное значение для мировой экономике и в ближайшем будущем. Вместе с тем нефтегазовая промышленность сталкивается с известной проблемой истощения месторождений, а разработка новых связана с колоссальными затратами и высокими рисками. Поэтому возникает задача проведения качественных и эффективных геологоразведочных мероприятий.

Одним из основных инструментов геологоразведочных работ являются сейсмические исследования, а математическое моделирование давно стало их неотъемлемой частью. Методы компьютерного моделирования позволяют получить важные для практики выводы о том, какие особенности и признаки полезно искать на полученных в ходе исследования того или иного геологического объекта реальных сейсмозаписях. Вопрос об обнаружения залегающих на большой глубине кластеров трещин, содержащих нефте- и газопродукты, и ведёт к теме данной работы. В работах [1, 2] подробно описана значимость исследования таких трещиноватых сред, а также возникающие при этом проблемы.

Для моделирования сейсмических процессов в геологических средах существует множество различных численных методов (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод Галёркина и др.) [4, 5, 3]. При этом самые эффективные методы должны учитывать характеристические свойства систем уравнений гиперболического типа, которыми такие процессы описываются. Это необходимо для учёта физики задачи, построения корректных алгоритмов на границах области интегрирования и раздела сред, на поверхностях трещин. Одним из таких методов является сеточнохарактеристический метод, который применялся в настоящей работе.

Сеточно-характеристический метод, или обратный метод характеристик, является усовершенствованием [6, 7] прямого метода характеристик [8]. Прямой метод подробно описан в одномерном случае в работе [9], позднее было проведено его обобщение и на многомерный [10]. Изначально сеточно-характеристический метод применялся для задач газовой динамики [11]. К задачам механики деформируемого твёрдого тела он был адаптирован лишь в 80-х гг. XX века [12, 13]. Для описания сейсмического поля сначала метод использовался на неструктурных треугольных сетках. В работе [14] с его помощью в двумерной постановке проведено численное моделирование сейсмических откликов в многослойной среде, позже метод был доработан для двухмерных расчётов при наличии флюидонасыщенной трещины в однородной среде [15]. Эффекты слоистости и трещиноватости объединялись в [16], также в 2D случае. В [17] исследовалось рассеяние волн от кластера пустых и заполненных трещин. В этой работе были также проведены тестовые расчёты в трёхмерной постановке на неструктурных тетраэдральных сетках, адаптация метода для которых описана в [18]. Отметим, что проведение полноволновых трёхмерных расчётов затруднено высокой вычислительной сложностью таких задач, преодолеть которую не всегда удаётся даже с применением технологий распараллеливания и распределённых систем. Предложенный в работе [19] сеточно-характеристический метод на гексаэдральных сетках значительно увеличивает скорость расчётов. С помощью него авторам удалось провести моделирование распространения упругих волн в трёхмерной однородной среде, содержащей кластер трещин, и размеры которой соответствовали реально исследуемым геологическим объектам.

Целью данной работы ставилось совмещение трещиноватости и слоистости среды в трёхмерном случае при моделировании распространения упругих волн.

2 Постановка задачи

Моделируемая область представляла из себя трёхмерный куб, длина и ширина которого были равны 10 км, а высота – 3 км. Среда состояла из 5 слоёв с различными упругими свойствами. Высота и другие параметры каждого из слоёв приведены в таблице 1. В работе рассматривались различные формы границ между ними: горизонтальные, наклонные и криволинейный. Плотность считалась постоянной во всей модели и равнялась 2500 кг/м³. В пятом слое, на глубине 2000 км, вдоль оси ОХ располагался кластер из 31 субвертикальной трещины с интервалом 100 м между ними. Угол наклона составлял -5 градусов с осью ОZ. Согласно [16] в геологии выделяют несколько категорий трещин в зависимости от их раскрытости и размеров. В исследуемой модели протяжённость каждой трещины равнялась 3 км, высота – 100 м, что относит их к категории макротрещин. В качестве заполнителя был выбран флюид, как самый часто встречающийся в решаемых на практике задачах. Ему могут соответствовать вода, нефть, сжиженный газ и т. д. Изображение моделируемого вмещающего массива приведено на Рис. 1. Отметим, что в силу особенностей формирования осадочных пород и физических процессов на глубине расположения трещиноватой кластера, такая субвертикальная ориентация трещин является характерной для геологических объектов [3, 1]. Равно как и описание среды в виде последовательности слоёв с горизонтальными или субгоризонтальными границами.



Рис. 1: Изображение моделируемой среды

Номер слоя	Толщина слоя, м	Скорость продоль-	Скорость попереч-
		ных волн, м/с	ных волн, м/с
1	500	3500	1750
2	1000	4500	2250
3	300	5000	2500
4	100	4000	2000
5	1100	5500	2750

Таблица 1: Упругие параметры слоёв, образующих расчетную область

Для проведения численных расчётов в описанной общей трёхмерной модели сначала строилась параллелепипедная сетка, отдельно для каждого слоя. Шаг сетки составлял 20 м вдоль осей ОХ и ОҮ и 10 м вдоль ОΖ. Таким образом она содержала 75 млн. узлов. Затем, в случае наличия в слое негоризонтальной границы или кластера трещин, сетка преобразовывалась в гексаэдральную согласно [19]. Учёт трещиноватости проводился в приближении бесконечно тонкой трещины. По обе стороны от плоскости каждой трещины выделялись ближайшие узлы, которые составляли её левый и правый борт. В процессе расчётов на бортах производилась корректировка значений исходя из физических условий. Такой подход позволяет не решать уравнения акустики внутри всех трещин, а его применимость и корректность показана в работах [20, 16, 21].

Источником возмущения при моделировании являлась плоская волна длиной 150 м, распространяющаяся с глубины 200 м вертикально вниз вдоль оси ОZ (Рис. 2).



Рис. 2: Состояние среды в начальный момент времени

3 Математическая модель

3.1 Уравнения механики деформируемого твёрдого тела

Для описания динамических процессов использовалась математическая модель линейно-упругого изотропного тела. Бесконечно малый объём такой среды описывается системой уравнений [22, 23]:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = q_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t},
q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$
(3.1)

где ρ – плотность среды, v_i – компоненты скорости среды, σ_{ij} – тензор напряжений Коши, x – координата, q – тензор четвёртого порядка, определяющий реологию среды, ε – тензор деформаций, δ – символ Кронекера, λ и μ – упругие параметры Ламе.

Данную систему можно переписать в координатном представлении. В трёхмерном случае и декартовых координатах она принимает вид:

$$\begin{split} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda (\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}), \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial y} + \lambda (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}), \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}), \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu (\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x}), \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= \mu (\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}), \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= \mu (\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}), \end{split}$$

В вычислительной математике используется другая, каноническая, форма записи уравнений (3.1). Введя новое обозначение вектора искомых функций **u** = $\begin{pmatrix} v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \end{pmatrix}^T$, получим матричную форму записи системы дифференциальных уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_{\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0$$
(3.2)

Здесь $\mathbf{A_x},\,\mathbf{A_y}$ и $\mathbf{A_z}-$ матрицы размера 9×9. В декартовых координатах их вид:

3.2 Граничные условия

Внутренняя область каждого из слоёв, кроме слоя содержащего кластер трещин, является однородной изотропной средой, и в них решается система уравнений (3.2). Остальные узлы можно разбить на следующие группы:

- Узлы, принадлежащие верхней границе интегрирования
- Узлы, принадлежащие нижней и боковым границам интегрирования
- Узлы, принадлежащие границе различных слоёв
- Узлы, описывающие борта трещин
- Оставшиеся узлы слоя с трещинами

В узлах последней группы так же лишь решается система (3.2). Во всех граничных точках требуется корректировка значений тензора напряжений и вектора скорости в соответствии с теми или иными физическими соображениями.

На границе двух различных слоёв ставится условие полного слипания, которое обеспечивает непрерывность вектора скорости и выполнение третьего закона Ньютона. Математически эти условия выражаются следующими уравнениями:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \ \ \sigma_{nn} = \sigma'_{nn}, \ \ \sigma_{n\tau} = \sigma'_{n\tau},$$

где σ_{nn} и σ_{nn} – нормальные и касательные компоненты тензора напряжений, а **n** – нормаль к границе. Штрихи обозначают переменные другого контактирующего слоя.

Так как в процессе сейсморазведки геологическая среда ничем не ограничена, на нижней и боковых границах ставится условие поглощения, которое позволяет упругим волнам свободно проходит через них, не образуя отражённых. На поверхности среды же ставится условие нулевой приложенной силы (так называемая дневная поверхность):

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Для моделирования флюидонасыщенных трещин на их бортах ставится условие свободного скольжения вдоль плоскости трещин. При этом на границе совпадают нормальные компоненты вектора скорости, тангенциальные компоненты сил равны нулю, а нормальные компенсируют друг друга:

$$\mathbf{vn} = \mathbf{v'n}, \ \mathbf{f_n} = \mathbf{f'_n}, \ \mathbf{f_\tau} = \mathbf{f'_\tau}.$$

Здесь вектор **n** – нормаль к поверхности наклонных трещин. С постановкой граничных условий для различных типов трещин подробнее можно ознакомиться, например, в [24].

4 Численный метод

Так как в общем случае невозможно получить аналитическое решение системы уравнений (3.2), необходимо применять численные методы для её приближённого решения. Как уже было сказано, в работе использовался сеточно-характеристический метод на параллелепипедных и криволинейных гексаэдральных сетках. Ниже описываются основные моменты данного метода и приводятся некоторые формулы. Подробный же вывод всех представленных соотношений можно найти в работе [25].

4.1 Метод расщепления по координатам

Сеточно-характеристический метод допускает использование метода расщепления по пространственным координатам для решения трёхмерных задач. На первом этапе система (3.2) распадается на три одномерных системы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$
 (4.1)

Допустим, построены разностные схемы для их решения. Отождествляя одномерную схему перехода с одного временного слоя на другой с действием оператора *f*, получим:

$$\mathbf{u}^{n+1} = f_i(A_i)\mathbf{u}^n.$$

Затем на основе операторов для одномерных задач строится оператор перехода для исходной трёхмерной задачи (3.2) [26, 27]:

$$F(A_1, A_2, A_3) = f_3(A_3)f_2(A_2)f_1(A_1).$$

4.2 Решение одномерной системы уравнений гиперболического типа

В следствие того, что каждая из трёх систем (4.1) является гиперболической, имеются полные наборы собственных векторов с действительными собственными значениями. Обозначая матрицы, составленные из собственных векторов за Ω_i , а диагональные матрицы из собственных значений за Λ_i , получаем запись уравнений в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega_i^{-1} \Lambda_i \Omega_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0.$$
(4.2)

Все матрицы Λ_i при этом имеют единый вид:

$$\Lambda_i = \text{diag}\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\},\$$

где $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – продольная и поперечная скорости в среде соответственно. Умножая уравнения (4.2) слева на Ω_i :

$$\frac{\partial(\Omega_i \mathbf{u})}{\partial t} + \Lambda_i \frac{\partial(\Omega_i \mathbf{u})}{x_i} = 0$$

и переходя к инвариантам Римана $\mathbf{v} = \Omega_i \mathbf{u}$, получаем три системы вида:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = 0,$$

каждая из которых затем распадается на девять скалярных уравнений переноса:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{x} = 0, \quad j = 1 \dots 9.$$

Затем данные одномерные уравнения переноса решаются конечно-разностными схемами на основе метода характеристик. После того, как все компоненты **v** перенесены из предыдущего временного слоя, можно обратно перейти от инвариантов Римана к исходным переменным:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \Omega^{-1} \mathbf{v}^{n+1}.$$

В настоящей работе для решения одномерных уравнений переноса использовалась схема четвёртого порядка точности по пространству [28]:

$$\begin{split} v_m^{n+1} &= v_m^n - \sigma(\Delta_1 - \sigma(\Delta_2 - \sigma(\Delta_3 - \sigma\Delta_4))) \\ \Delta_1 &= \frac{1}{24} (-2v_{m+2}^n + 16v_{m+1}^n - 16v_{m-1}^n + 2v_{m-2}^n) \\ \Delta_2 &= \frac{1}{24} (-v_{m+2}^n + 16v_{m+1}^n - 30v_m^n + 16v_{m-1}^n - v_{m-2}^n) \\ \Delta_3 &= \frac{1}{24} (2v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 4v_m^n - 2v_{m-2}^n) \\ \Delta_4 &= \frac{1}{24} (v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n). \end{split}$$

Здесь $\sigma=\frac{c\tau}{h}$ – число Куранта.

5 Результаты

Математическая модель и численный метод, описанные выше, реализованы в программном комплексе, развиваемом на кафедре информатики и вычислительной математики МФТИ. В силу высокой вычислительной сложности решаемой задачи, используется параллелизация алгоритма на основе технологии MPI. Все расчёты проводились на супер-ЭВМ, обладающей 30 процессорными ядрами и оперативной памятью объёмом 128 Гб. При данных условиях, продолжительность одного расчёта составляла порядка 10 часов.

В ходе расчётов для каждого узла сетки записывался модуль вектора скорости смещения. С помощью программы Paraview по этим данным строились волновые картины. Однако, на практике нет возможности получить такие данные для всего геологического объекта, поэтому анализируется сигнал на поверхности. При проведении сейсморазведочных работ всё чаще используются трёхкомпонентные датчики(сейсмометры) [29]. Поэтому, с помощью программы Seismograph [30], в качестве результатов моделирования также строились по отдельным компонентам вектора скорости волновые поля на дневной поверхности в виде сейсмограмм.

5.1 Модель 1

Первая из построенных моделей являлась не слоистой, а однородной средой с кластером трещин. Она имела тестовый характер и рассматривалась с целью наглядно получить волновой отклик только от системы трещин и иметь сейсмограммы для сравнения с другими моделями. На Рис. 3 изображены волновые картины для модели номер 1 после прохождения начального возмущения через систему трещин и в момент времени, когда рассеянные волны, отражённые от трещиноватого кластера, достигли дневной поверхности. Можно отметить, что фронт возмущений в последнем случае соответствует форме рассматриваемого кластера.

На Рис. 4 представлены сейсмограммы, записанные по компонентам вектора скорости на поверхности среды. Видно образование как продольных колебаний на компоненте v_z , так и поперечных колебаний на компоненте v_x . При регистрации компоненты v_y отмечается нулевой уровень полезных сигналов, поэтому далее её записи не приводятся.



б) t = 0.97 с

Рис. 3: Волновые картины для модели 1









б) v_z

Рис. 4: Сейсмограммы, построенные по компонентам вектора смещения для модели 1

5.2 Модель 2



Рис. 5: Схематичное изображение модели 2 в сечении плоскостью ОХZ

Модель номер 2 представляла из себя уже слоистую среду с горизонтальными границами (см. Рис. 5). На волновой картине (Рис. 6) добавляются многократно отражённые от границ между слоями и от дневной поверхности волны. Глядя на сейсмограммы (Рис. 7), можно заметить, что в случае слоистой среды полезный сигнал от трещиноватого кластера полностью замаскирован кратными волнами на записях, построенных по вертикальной компоненте вектора скорости. Однако, на поверхностном волновом поле, построенном по горизонтальной компоненте, эти кратные волны отсутствуют. Данный факт является следствием того, что при нормальном падении плоской продольной волны на границу раздела упругих сред коэффициент отражения P-S равен нулю, и не возникает обменной волны, имеющей горизонтальную составляющую. Таким образом, прямым численным расчётом показано преимущество регистрации горизонтальной компоненты скорости смещения для плоскопараллельных трещиноватых сред.



Рис. 6: Волновая картина для модели 2, $t=0.60~{\rm c}$



Рис. 7: Сейсмограммы, построенные по компонентам вектора смещения для модели 2

5.3 Модель 3



Рис. 8: Схематичное изображение модели 3 в сечении плоскостью ОХZ

В третьей модели граница между слоями 1 и 2 заменялась на наклонённую под углом 0.6° плоскость, задаваемую уравнением:

$$Z = -0.01X - 450.$$

Волновая картина для данной модели представлена на Рис. 9, где наблюдается множество наклонных волновых фронтов, образованных отражением от такого контакта между слоями.



Рис. 9: Волновая картина для модел
и $3,\,t=0.54$ с

Глядя на сейсмограмму, построенную по компоненте v_x , приходим к выводу, что и в случае наклонной границы выявляются рассеянные от системы трещин волны.



Рис. 10: Сейсмограмма, построенная по горизонтальной компоненте вектора смещения v_x для модели 3

5.4 Модель 4



Рис. 11: Схематичное изображение модели 4 в сечении плоскостью ОХZ

Модель номер 4 строилась на основе модели номер 2 с помощью замены границы между вторым и третьим слоем на синусоиду:

$$Z = -1500 - 50\cos\frac{\pi X}{1000}$$

Результаты расчётов приведены на Рис. 12-13.



Рис. 12: Волновая картина для модел
и $4,\,t=0.66$ с



Рис. 13: Сейсмограмма, построенная по горизонтальной компоненте вектора смещения v_{x} для модели4

5.5 Модель 5



Рис. 14: Схематичное изображение модели 5 в сечении плоскостью OXZ

Наконец, в последней модели среды совмещались наклонная граница из моде-

ли номер 3 и криволинейная из модели номер 4. На Рис. 15 представлена волновая картина, а на Рис. 16 поверхностное волновое поле, построенное по всё той же горизонтальной компоненте вектора скорости смещения v_x . Как и ожидалось, в данном случае наблюдался наиболее сложная картина. На сейсмограмме можно отметить следующие сигналы: в момент времени $t \approx 0.25$ с приходит волна, отражённая от наклонной границы; далее, при $t \approx 0.6$ с – отражённая от криволинейной границы волна; в интервале $t \approx 0.6-1.3$ с, как и на картине для модели 4, рассеянная от трещиноватой структуры компонента видна неотчётливо, а основной сигнал, приходящий от системы трещин в интервале $t \approx 1.4-1.6$ с, явно выделяется.



Рис. 15: Волновая картина для модели 5, $t=0.62~{\rm c}$



Рис. 16: Сейсмограмма, построенная по горизонтальной компоненте вектора скорости смещения v_x для модели 5

6 Заключение

В данной работе проведено моделирование распространения упругих волн в трёхмерных средах, содержащих неоднородность в виде трещиноватого массива. А точнее исследовался рассеянный от системы флюидонасыщенных трещин сигнал в условиях, когда среда представляла из себя последовательность однородных слоёв с различными параметрами упругости. Был разработан ряд моделей с различной формой границ между слоями, и построены для них расчётные сетки. Для описания динамические процессов в моделях использовалась система уравнений гиперболического типа линейно упругого тела, которая численно решалась с помощью сеточнохарактеристического метода.

В ходе расчётов на поверхности среды регистрировались три компоненты вектора скорости смещения в каждый момент времени. По полученным таким образом данным были построены поверхностные волновые картины в виде сейсмограмм. Их анализ показал, что регистрация горизонтальной составляющей позволяет выделить отражённый от кластера трещин сигнал как в случае плоскопараллельных, так и в случае наклонных и криволинейных границ между слоями. Данный результат может быть полезен при решении различных задач сейсморазведки.

Список литературы

- Козлов Е.В. Модели среды в разведочной сейсмогеологии. Тверь: ГЕРС, 2006. — 480 с.
- [2] Левянт В. Б., Хромова И. Ю., Козлов Е. А., Керусов И. Н., Кащеев Д. Е., Колесов В. В., Мармалевский Н. Я. Методические рекомендации по использованию данных сейсморазведки для подсчёта запасов углеводородов в условиях карбонатных пород с пористостью трещинно-кавернозного типа. — Москва: ОАО «ЦГЭ», 2010. — 250 с.
- [3] Квасов И. Е., Левянт В. Б., Петров И. Б. Решение прямых задач сейсморазведки в трещиноватых средах методом сеточно-характеристического моделирования (с целью исследования возможности прямого обнаружения трещиноватых зон). — Москва: ЕАГЕ Геомодель, 2016.
- [4] Virieux J., Calandra H., Plessix R. E. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging. // Geophys. Prospect. - 2011. - Vol. 59, - N 5. - P. 794-813.
- [5] Carcione J. M., Herman Gerard C., Kroode P. E. Y2K Review Article: Seismic modeling // Review Literature And Arts Of The Americas. - 2002. - Vol. 67, - N 4. - P. 1304-1325.
- [6] Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1969. — Т.9. — № 2. — С. 383–396
- [7] Кукуджанов В. Н. Численное решение неодномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах // Сообщения по прикл. матем. ВЦ АН СССР. — 1976. — Вып. 6. — С. 11–37.
- [8] Massau J. Memoire sur l'integration graphique aux derives partielles. Ghent:
 F. Meyer-van Loo, 1899.

- [9] Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1960. — № 58. — С. 4–150.
- [10] Butler D. S. The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations of three independent variables // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. - 1960.
 - Vol. 255. - N. 1281. - P. 232-241.
- [11] Холодов А. С. Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы Сер. В. Т. 7-1, Ч. 2. Математическое моделирование низкотемпературной плазмы. — Москва.: Янус-К, 2008. — С. 141–174.
- [12] Петров И. Б., Холодов А. С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1984. — Т. 24. — Вып. 5. — С. 722–739.
- [13] Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластических сред с конечными деформациями // Сб. по числ. методам в механ. деформируемого твердого тела. — 1978. — С. 84–122.
- [14] Квасов И. Е., Панкратов С. А., Петров И.Б. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточнохарактеристическим методом // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22. — № 9. — С. 13–22.
- [15] Квасов И. Е., Панкратов С. А., Петров И. Б. Численное исследование динамических процессов в сплошной среде с трещиной, инициируемых приповерхностным возмущением, сеточно-характеристическим методом // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22. — № 11. — С. 109–122.
- [16] Левянт В. Б., Петров И. Б., Квасов И. Е. Численное моделирование волнового отклика от субвертикальных макротрещин, вероятных флюидопроводящих каналов // Технологии сейсморазведки. — 2011. — № 4. — С. 41–61.

- [17] Квасов И. Е., Петров И. Б. Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в задачах сейсморазведки с помощью высокопроизводительных ЭВМ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52. — № 2. — С. 330–341.
- [18] Муратов М. В., Петров И. Б., Санников А. В., Фаворская А. В. Сеточнохарактеристический метод на неструктурированных тетраэдральных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54. — № 5. — С. 821–832.
- [19] Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И., Шульц К. И. Численный расчет волновых процессов в трещиноватых средах на гексаэдральных сетках сеточнохарактеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — № 3. — С. 512–522.
- [20] В.Б. Левянт, В.А. Миряха, М.В. Муратов, И.Б. Петров Оценка влияния на сейсмческий отклик степени раскрытости трещины и доли площади локальных контактов к её повернности // Технологии сейсморазведки. —2015. — № 3. — С. 16–30.
- [21] Левянт В. Б., Петров И. Б., Муратов М. В. Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин // Технологии сейсморазведки. — 2012. — № 1. — С. 5–21.
- [22] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. Москва: Наука, 1970 с. 143.
- [23] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965.
- [24] М. В. Муратов, И. Б. Петров, В. Б. Левянт, Разработка математических моделей трещин для численного решения задач сейсморазведки с применением сеточнохарактеристического метода. // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8. — Вып. 6. — 911–925
- [25] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы.
 Москва: Наука, 1988. 288 с.

- [26] Челноков Ф. Б. Численное моделирование деформационных динамических процессов в средах со сложной структурой. — Ph.D.thesis /МФТИ (ГУ). — 2005.
- [27] Хохлов Н. И. Численное моделирование сейсмических процессов на высокопроизводительных вычислительных системах. — Ph.D.thesis /МФТИ (ГУ). — 2012.
- [28] Голубев В. И. Численное решение пространственных динамических задач механики неоднородных деформируемых сред. — Ph.D.thesis /МФТИ (ГУ). — 2012.
- [29] Bob A. Hardage, Michael V. DeAngelo, Paul E. Murray, Diana Sava Multicomponent Seismic Technology // Society of Exploration Geophysicists. — 2011.
- [30] Голубев В. И. Методика отображения и интерпретации результатов полноволновых сейсмических расчётов // Труды МФТИ. — Т. 6. — Вып. 1. — 2014. — С. 154—161