Машина Тьюринга

Алгоритмы
и алгоритмические языки

goo.gl/c8pyqx

Лекция 2, 12 сентября, 2017

Лектор:

Дмитрий Северов, кафедра информатики 608 КПМ

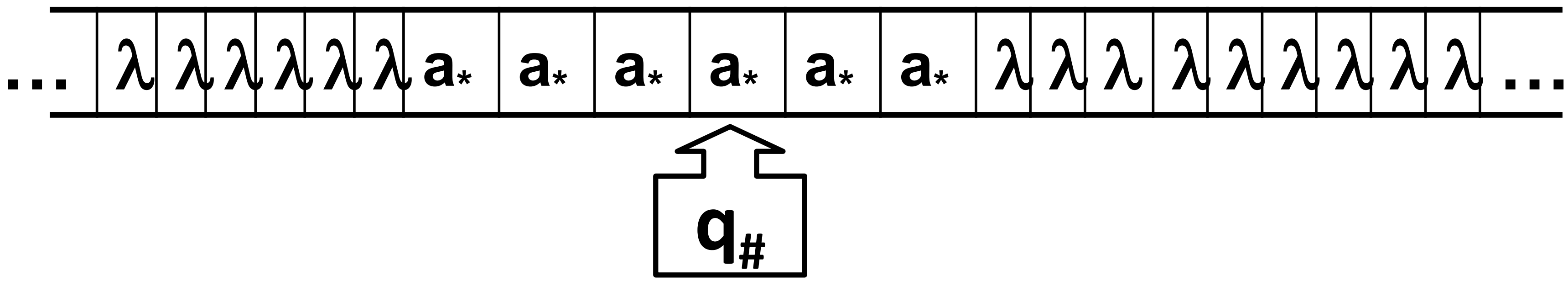
dseverov@mail.mipt.ru

http://cs.mipt.ru/wp/?page_id=6077

Устройство машины Тьюринга

1. конечный алфавит символов $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots a_n\}$;
2. конечный список $Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ элементарных состояний;
3. программа, составленная из команд T_{ij}, имеющих вид: $a_i q_j \rightarrow a'_i q'_j M$, где M - один из символов движения L, R или S.

NB: результат работы машины зависит от её начального состояния



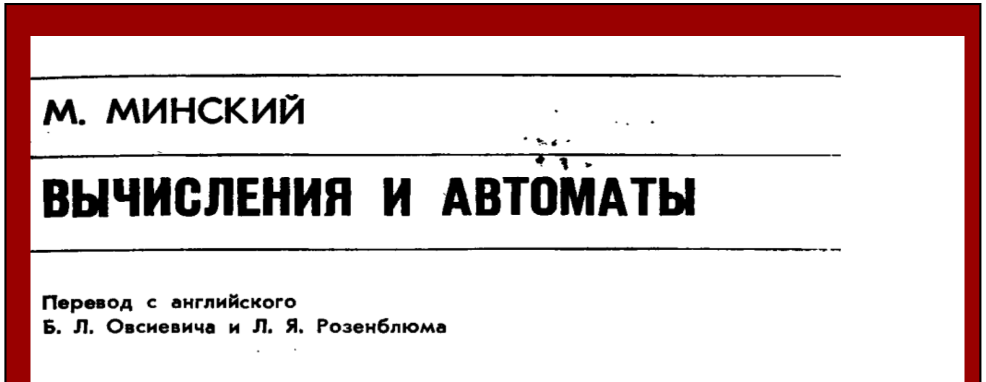
Написать программу для машины Тьюринга, заполняющую ячейку ленты, на которую указывает головка в конечном состоянии,

- символом *1*, если на ленте задано правильное скобочное выражение и
- символом *0* – в противном случае.

Начальное положение головки – установлена на первый (самый левый) символ скобочного выражения.

Вариант программы на C++

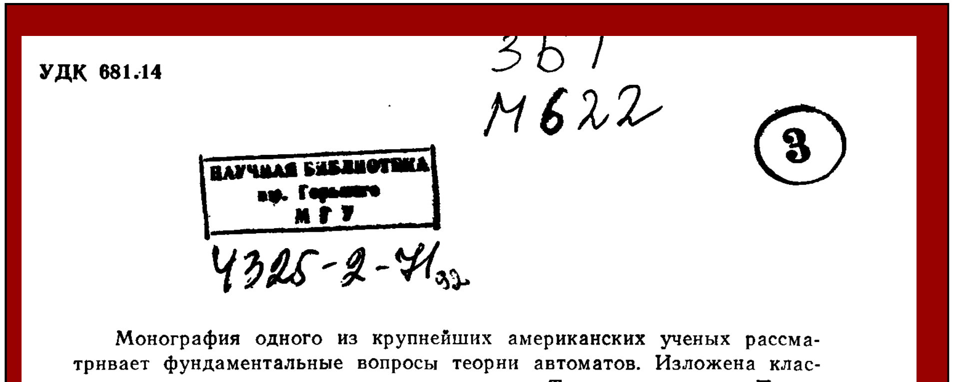
```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;
string str;
int main() {
int s=0;
   cin >> str;
   for(int i=0;i<str.length();i++)
       if(str[i]=='(') s++; else
if(--s<0) break;
   cout << (s?"No":"Yes") << endl;
   return 0;
}
```



М. МИНСКИЙ

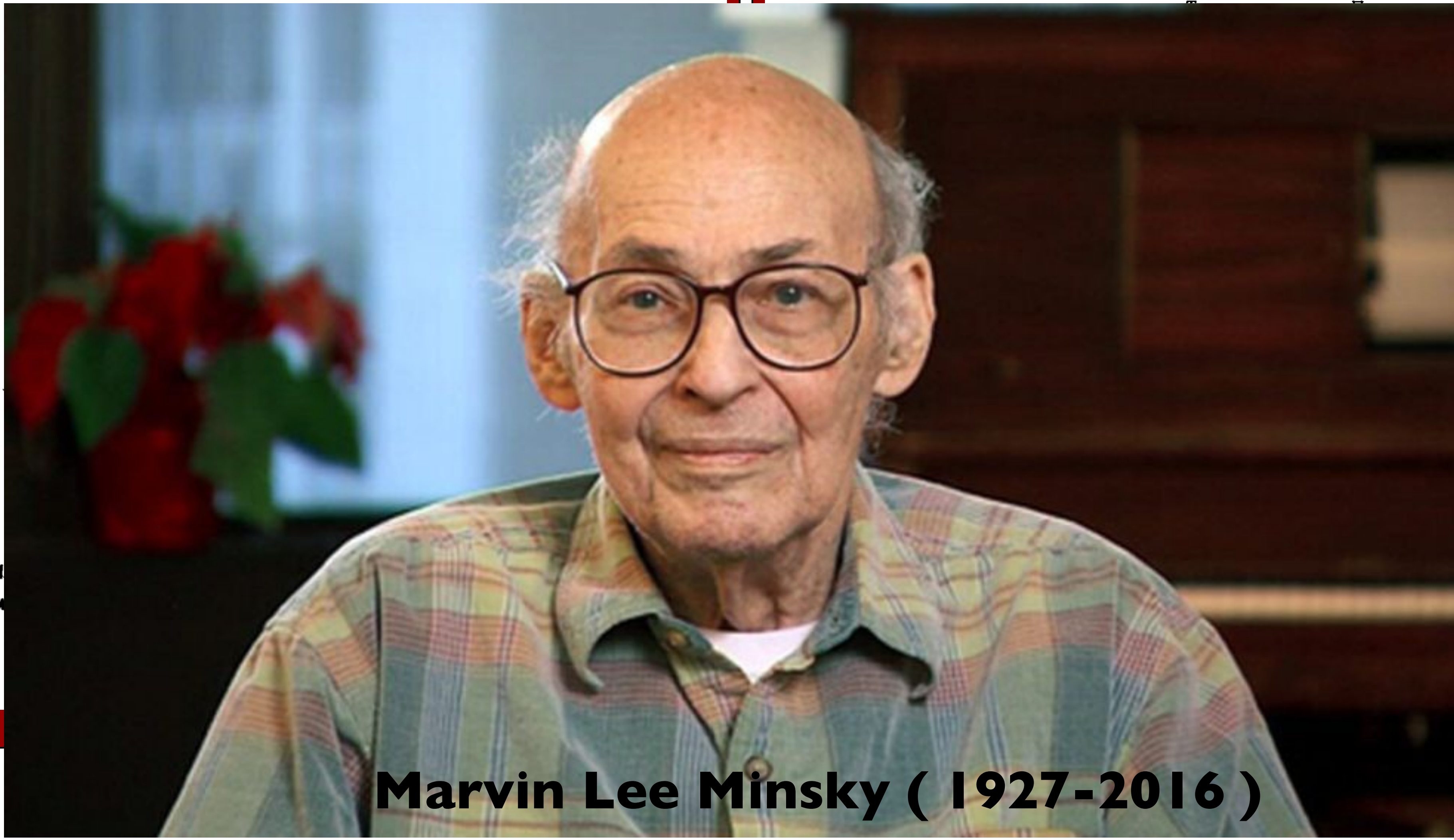
ВЫЧИСЛЕНИЯ И АВТОМАТЫ

Перевод с английского
Б. Л. Овсиевича и Л. Я. Розенблюма



УДК 681.14

Монография одного из крупнейших американских ученых рассматривает фундаментальные вопросы теории автоматов. Изложена клас-



Marvin Lee Minsky (1927-2016)

Таблица 6.1.2

Пятерки для устройства проверки скобочных выражений

Q	S	Q′	S′	D
0	)	1	X	0
0	(	0	(	1
0	A	2	A	0
0	X	0	X	1

q_0

Q	S	Q′	S′	D
1	)	1	)	0
1	(	0	X	1
1	A	H	0	—
1	X	1	X	0

q_1

Q	S	Q′	S′	D
2	)	Не встречается		
2	(	H	0	—
2	A	H	1	—
2	X	2	X	0

q_2

	q_0	q_1	q_2
)	X q_1 L	) q_1 L	– – –
(	(q_0 R	X q_0 R	0 – S
λ	λ q_2 L	0 – S	1 – S
X	X q_0 R	X q_1 L	X q_2 L

	q_0	q_1	q_2
)	X q_1 L	) q_1 L	- - -
(	(q_0 R	X q_o R	0 - S
λ	λ q_2 L	0 - S	1 - S
X	X q_0 R	X q_1 L	X q_2 L

Алфавит

α = {(,),0,1,X}

Состояния

q_0 – исходное и поиск)

q_1 – влево до парной

q_2 - влево до финиша

Программа для МТ

$(q_0 \rightarrow (q_0R$

$)q_0 \rightarrow Xq_1L$

$Xq_0 \rightarrow Xq_0R$

$\lambda q_0 \rightarrow \lambda q_2L$

$Xq_1 \rightarrow Xq_1L$

$(q_1 \rightarrow Xq_0R$

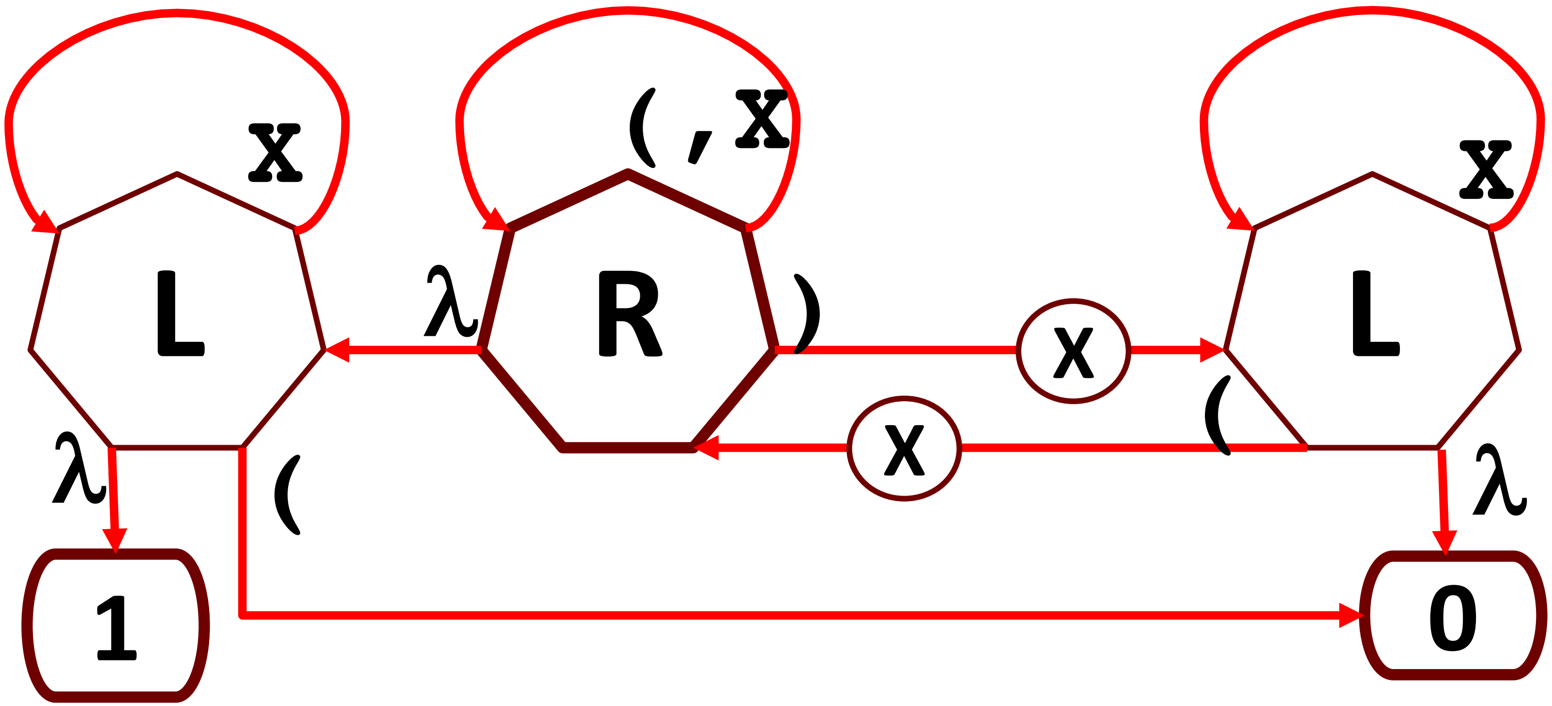
$\lambda q_1 \rightarrow 0-S$

$Xq_2 \rightarrow Xq_2L$

$(q_2 \rightarrow 0-S$

$\lambda q_2 \rightarrow 1-S$

Блок-схема программы для МТ



2 – Финишный поиск влево

0 – Старт и поиск вправо

1 – Поиск влево

Композиция машин Тьюринга

…λλλ((((( )) ( )) ( )))λ( ) ( )λλλ…

-) 0 -> X 1 L
  (0 -> (0 R
  X 0 -> X 0 R
  λ 0 -> 0 2 L
- (1 -> X 0 R
  X 1 -> X 1 L
  λ 1 -> n 0 S
- (2 -> n 0 S
  X 2 -> X 2 L
  λ 2 -> y 0 S

-) 0 -> X 1 L
  (0 -> (0 R
  X 0 -> X 0 R
  λ 0 -> 0 2 L
- (1 -> X 0 R
  X 1 -> X 1 L
  λ 1 -> n 0 S
- (2 -> n 0 S
  X 2 -> X 2 L
  λ 2 -> y 0 S

Композиция машин Тьюринга

…λλλXXXXXXXXXXXXXXλ( ) ( )λλλ…

-) 0 -> X 1 L
  (0 -> (0 R
  X 0 -> X 0 R
  λ 0 -> 0 2 L

- (1 -> X 0 R
  X 1 -> X 1 L
  λ 1 -> n 0 S

- (2 -> 0 0 S
  X 2 -> X 2 L
  λ 2 -> 1 0 S

Композиция машин Тьюринга

…λλλXXXXXXXXXXXXXXλ( ) ( )λλλ…

-) 0 -> X 1 L
  (0 -> (0 R
  X 0 -> X 0 R
  λ 0 -> λ 2 L
- (1 -> X 0 R
  X 1 -> X 1 L
  λ 1 -> 0 0 S
- (2 -> 0 0 S
  X 2 -> X 2 L
  λ 2 -> λ 3 R

X 3 -> λ 3 R
λ 3 -> λ 4 R

-) 4 -> X 5 L
  (4 -> (4 R
  X 4 -> X 4 R
  λ 4 -> 0 6 L
- (5 -> X 4 R
  X 5 -> X 5 L
  λ 5 -> n 0 S
- (6 -> n 0 S
  X 6 -> X 6 L
  λ 6 -> y 0 S

Разновидности машин Тьюринга

к доказательству существования алгоритмически неразрешимых задач

Двоичная машина Тьюринга

- Пусть алфавит α машины T состоит из k символов, тогда для их кодирования машине T* потребуется n = $\lceil \log_2(k+1) \rceil$ двоичных разрядов.
- Анализ кортежей из n бит при движении T* вправо будет приводить к состоянию, соответствующему считыванию символа из α машиной T.
- И наоборот: с каждым из k символов будем ассоциировать набор из n движений влево T* с записью 0 или 1, которые составят двоичный код символа, который записала бы машина T.

$\alpha = \{0,1\}$:   (=10   )=01   X=11 λ=00

(0 -> (0 R
X 0 -> X 0 R
) 0 -> X 1 L
λ 0 -> 0 2 L

(1 -> X 0 R
X 1 -> X 1 L
λ 1 -> n 0 S

(2 -> n 0 S
X 2 -> X 2 L
λ 2 -> y 0 S

$\underline{1q_0 \text{ -> } 1q_{01}R}$
$0q_{01}$ -> $0q_0R$ //(
$1q_{01}$ -> $1q_0R$ //X
$\underline{0q_0 \text{ -> } 0q_{00}R}$
$0q_{00}$ -> $0q_{000}L$ //λ
$0q_{000}$ -> $0q_2L$
$1q_{00}$ -> $1q_{001}L$ //)
$0q_{001}$ -> $1q_1L$

$\underline{1q_1 \text{ -> } 1q_{11}L}$
$1q_{11}$ -> $1q_1L$ //X
$\underline{0q_1 \text{ -> } 1q_{10}L}$
$0q_{10}$ -> n-S //λ
$1q_{10}$ -> $1q_{101}R$ //(
$0q_{101}$ -> $1q_0R$

$\underline{0q_2 \text{ -> } 0q_{20}L}$
$0q_{20}$ -> y-S //λ
$1q_{20}$ -> n-S //(
$\underline{1q_2 \text{ -> } 1q_{21}L}$
$1q_{21}$ -> $1q_2L$ //X

$\alpha = \{0,1\}$: (=10)=01 X=11 λ=00

(0 -> (0 R
X 0 -> X 0 R
) 0 -> X 1 L
λ 0 -> 0 2 L

(1 -> X 0 R
X 1 -> X 1 L
λ 1 -> n 0 S

(2 -> n 0 S
X 2 -> X 2 L
λ 2 -> y 0 S

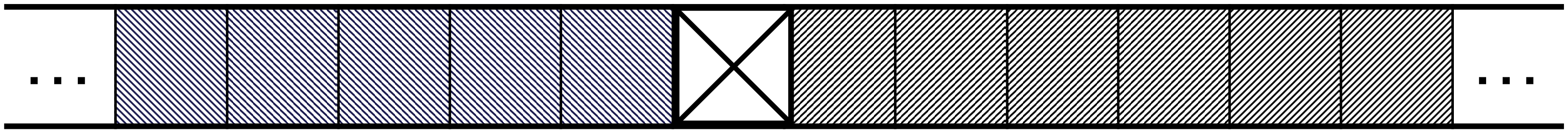
$1q_0 \rightarrow 1q_{\underline{3}}R$
$0q_{\underline{3}} \rightarrow 0q_0R$ //(
$1q_{\underline{3}} \rightarrow 1q_0R$ //X
$0q_0 \rightarrow 0q_{\underline{4}}R$
$0q_{\underline{4}} \rightarrow 0q_{\underline{5}}L$ //λ
$0q_{\underline{5}} \rightarrow 0q_2L$
$1q_{\underline{4}} \rightarrow 1q_{\underline{6}}L$ //)
$0q_{\underline{6}} \rightarrow 1q_1L$

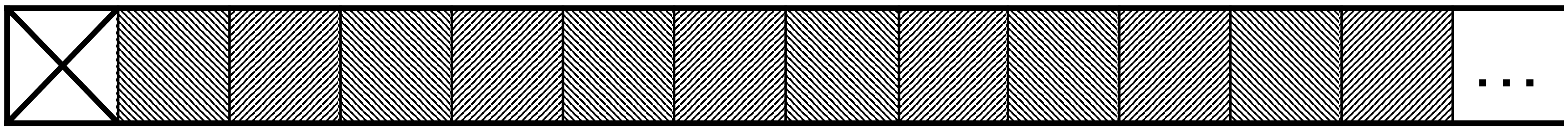
$1q_1 \rightarrow 1q_{\underline{7}}L$
$1q_{\underline{7}} \rightarrow 1q_1L$ //X
$0q_1 \rightarrow 1q_{\underline{8}}L$
$0q_{\underline{8}}$ -> n-S //λ
$1q_{\underline{8}} \rightarrow 1q_{\underline{9}}R$ //(
$0q_{\underline{9}} \rightarrow 1q_0R$

$0q_2 \rightarrow 0q_{\underline{10}}L$
$0q_{\underline{10}}$ -> y-S //λ
$1q_{\underline{10}}$ -> n-S //(
$1q_2 \rightarrow 1q_{\underline{11}}L$
$1q_{\underline{11}} \rightarrow 1q_2L$ //X

$Q = \{q_0 \dots q_{11}\}$

Машина Тьюринга с лентой, бесконечной в одном направлении.



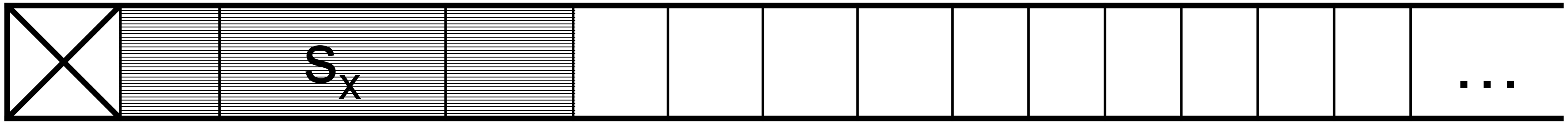


Функция вычислимая по Тьюрингу

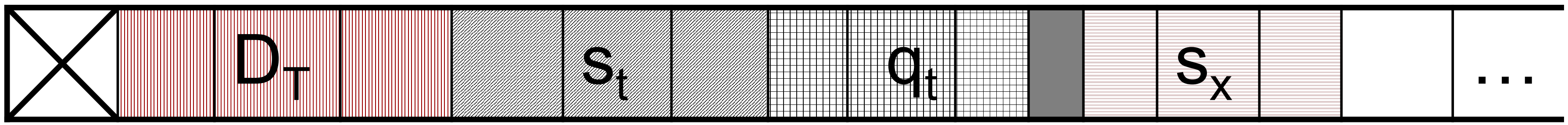
f – функция вычислимая по Тьюрингу, если её значения могут быть вычислены некоторой машиной Тьюринга, на ленте которой первоначально не записано ничего, кроме представления x в двоичном коде, а $f(x)$ – это то, что на ленте будет записано в двоичном коде, когда машина остановится.

Универсальная Машина Тьюринга

Если машина T: $s_x \rightarrow S_{f(x)}$



то существует машина U: $D_T, s_x \rightarrow S_{f(x)}$



Описание машины T | Символ T | Состояние T | Рабочая лента

Проблема останова

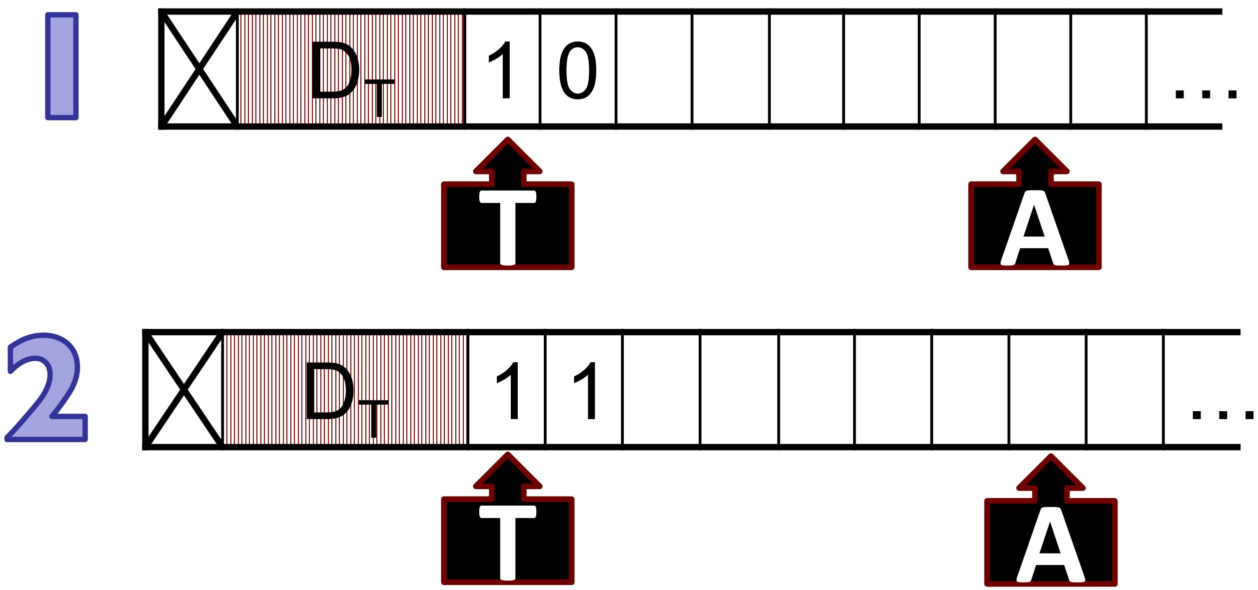
T:

10→11R

00→11R

11 →10L

01 →00S



∃ ли анализатор A: для ∀ T и ∀ t выдает результат

1 – в случае, если останов T на наборе t произойдет,

0 – в противном случае ?

АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕ РАЗРЕШИМА

Не существует алгоритма (машины Тьюринга),

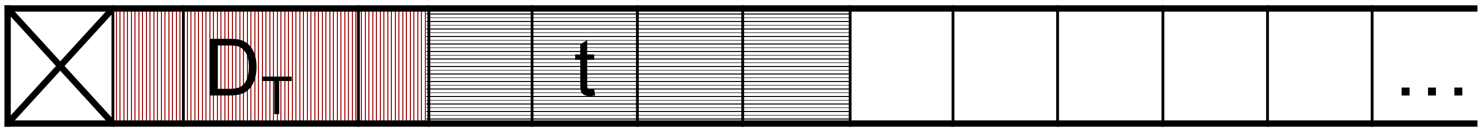
- **позволяющего определить по описанию**
    - **произвольного алгоритма**
    - **и его исходных данных**
- **останавливается или работает бесконечно**
    - **этот алгоритм**
    - **на этих данных.**

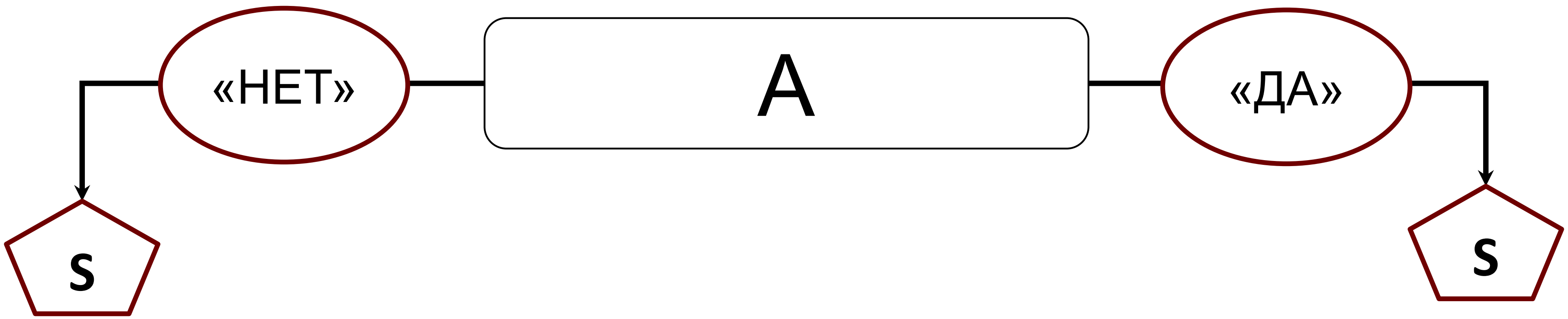
Доказательство

- Предположение обратного – существование «анализатора»
- Шаг 1. На вход анализируемой машине – её описание
- Определение самоприменимой машины
- Шаг 2. Композиция «анализатора» и «копира»
- Шаг 3. Модернизация композиции циклом
- Шаг 4. Парадокс свойств модернизированной композиции

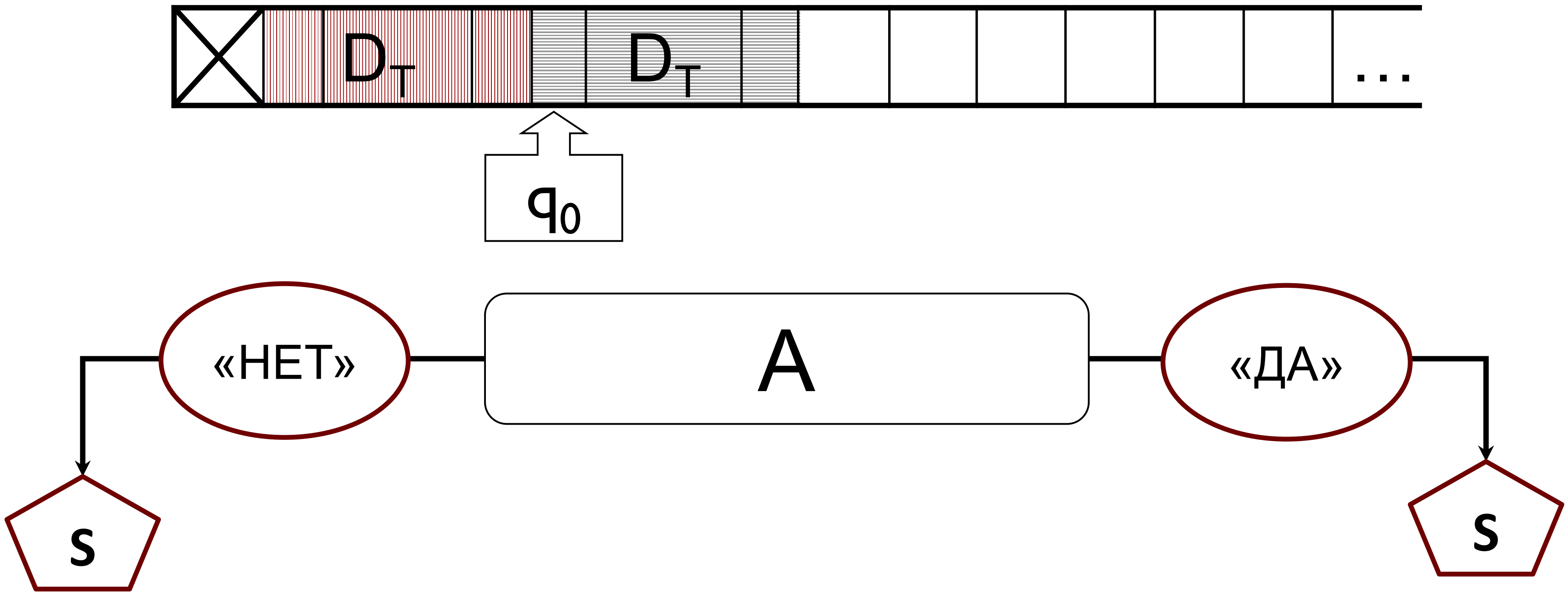
Предположим обратное, тогда:

∃ A: для некоторой T (произвольной!)
по данному её описанию D_T
и описанию (любой!) ленты t
определяет произойдет останов или нет.





Шаг 1



Пользуясь общностью набора данных рассмотрим частный случай, когда $t \equiv D_T$

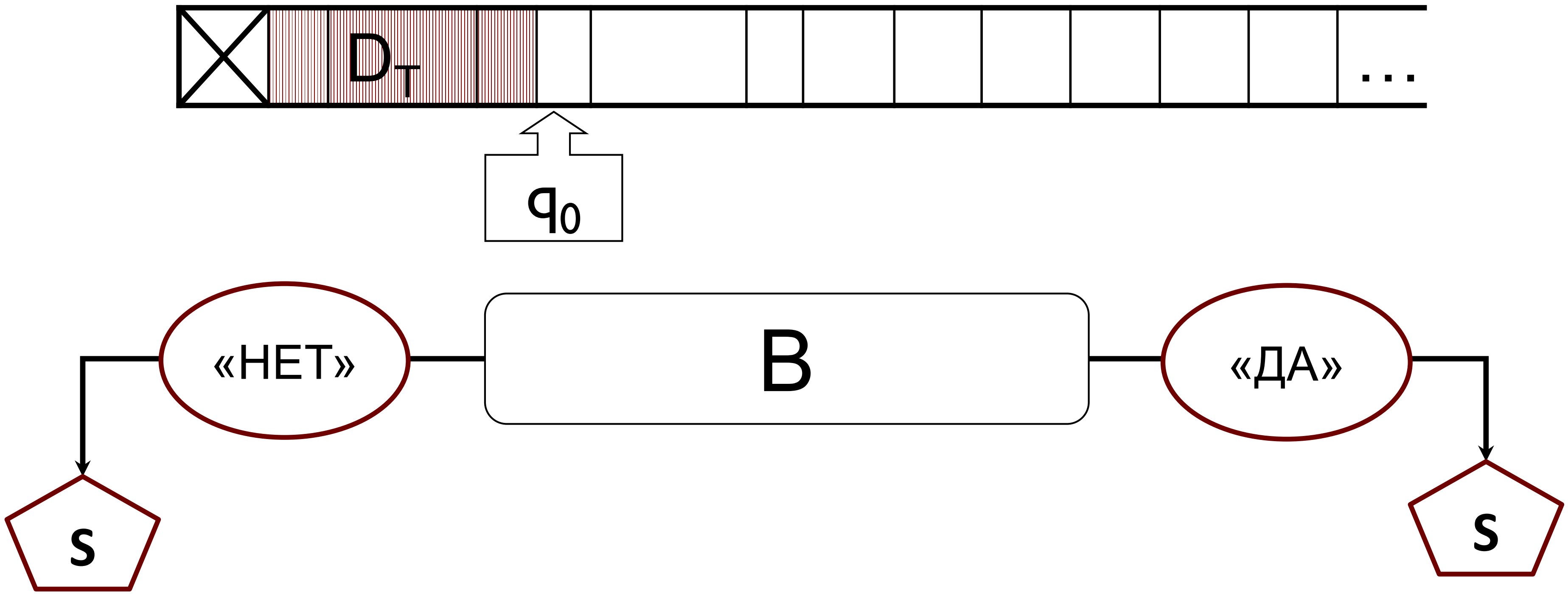
Само применимая машина Тьюринга достигает результирующего останова на данных являющихся кодом этой машины

10→11R 00→11R 11 →10L 01 →00S

Само применимая	Само не применимая
■ 101101	■ 111010
■ 001101	■ 010000
■ 111010	■ 101101
■ 010000	■ 001101

101101001101111010010000 11101110000101101001101

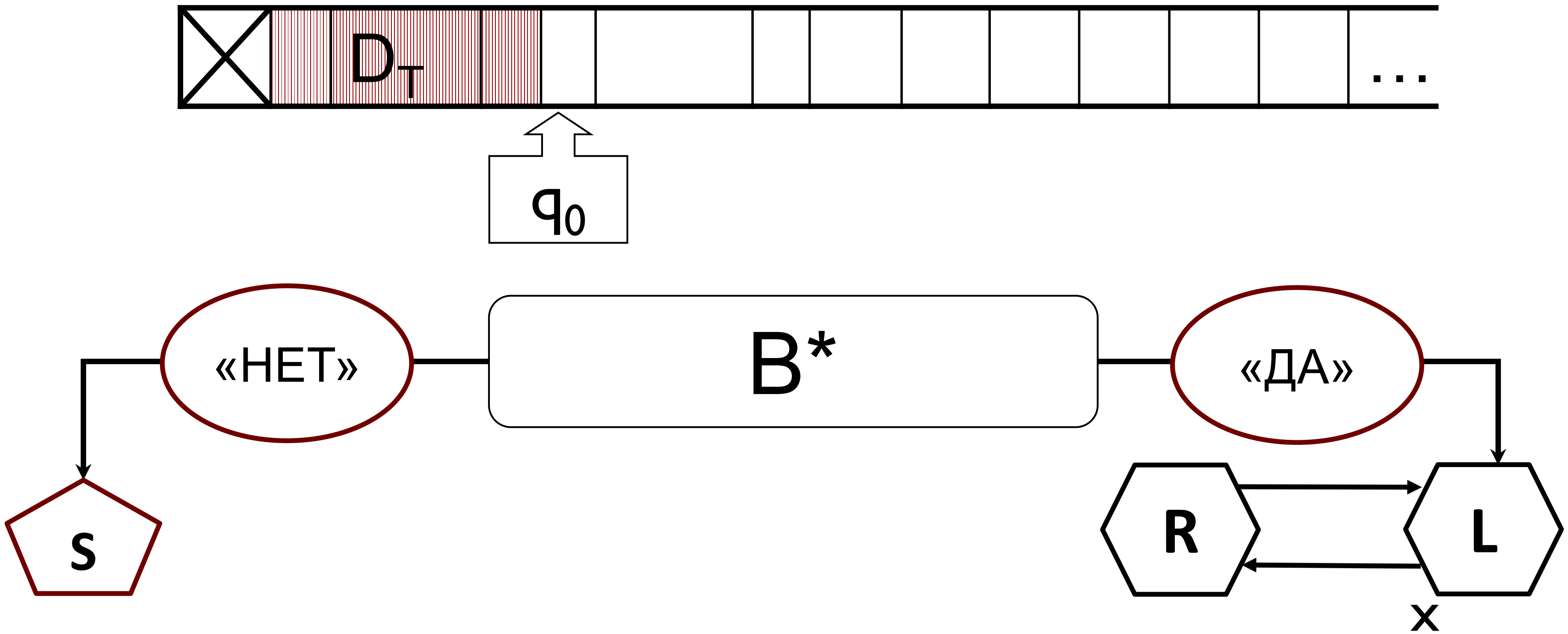
Шаг 2



- Машина B есть композиция двух машин:

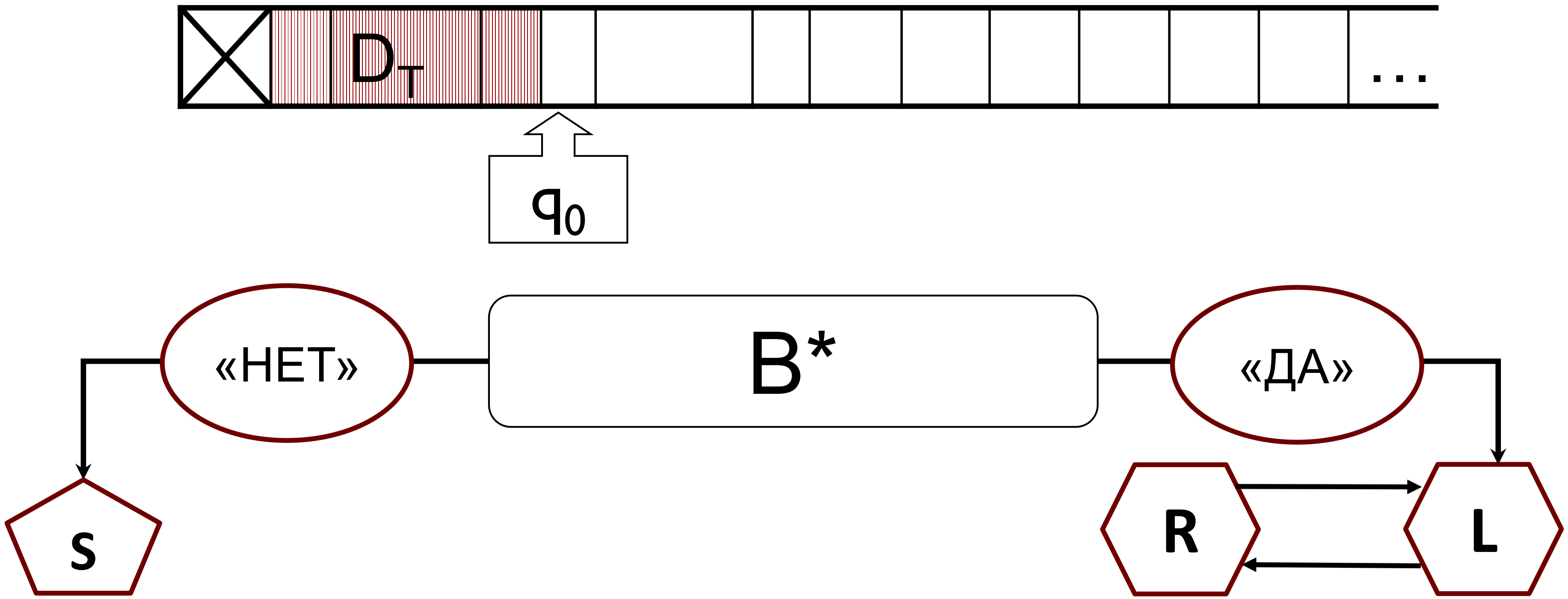
1. Создает копию D_T
2. Машина A

Шаг 3



- Модифицируем код машины B добавив в состав её команд цикл (для любого возможного x)
- Назовем такую машину B*

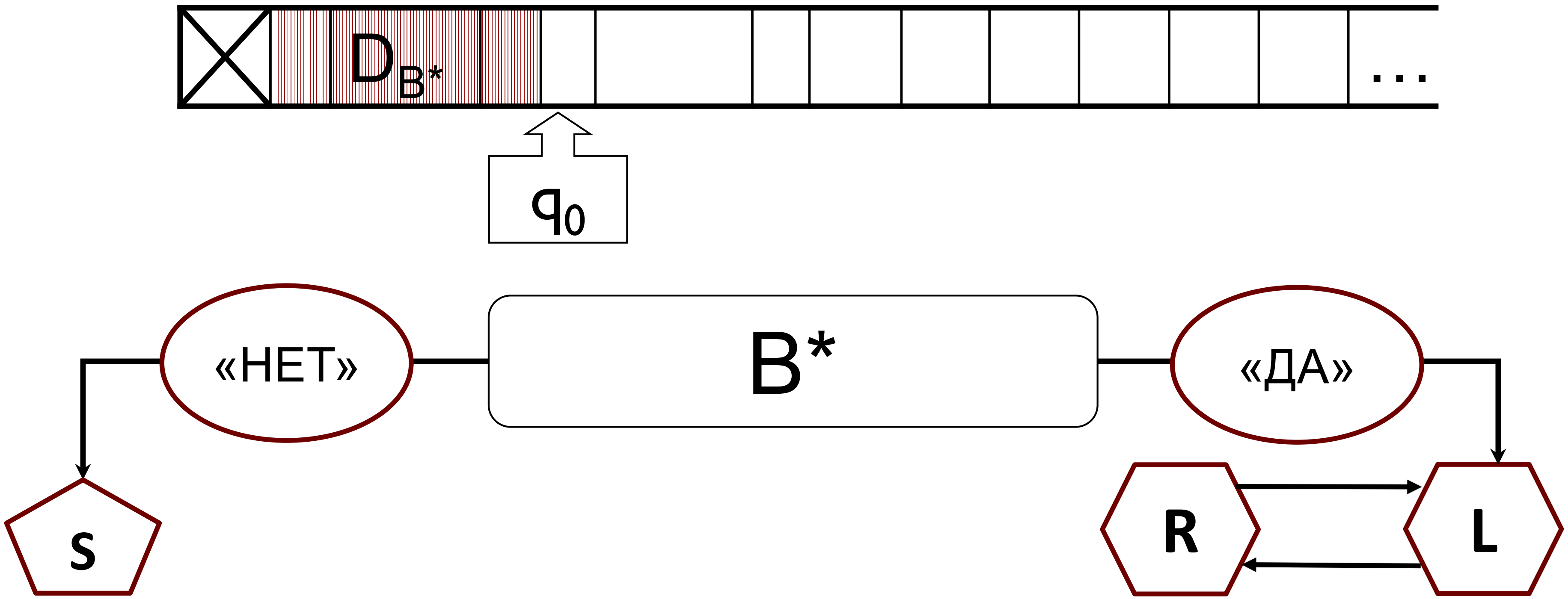
Свойства В*



Если анализатору В* предъявлено описание

- само-применимой МТ, то он зацикливается,
- если не самоприменимой, то он останавливается.

Шаг 4



B* самоприменимая машина?

- **Если да, то попадаем в цикл**
- **Если нет, то попадаем на останов**

Противоречия опровергают исходное предположение