

Алгоритмы

Маркова

Алгоритмы

и алгоритмические языки

goo.gl/c8puyx

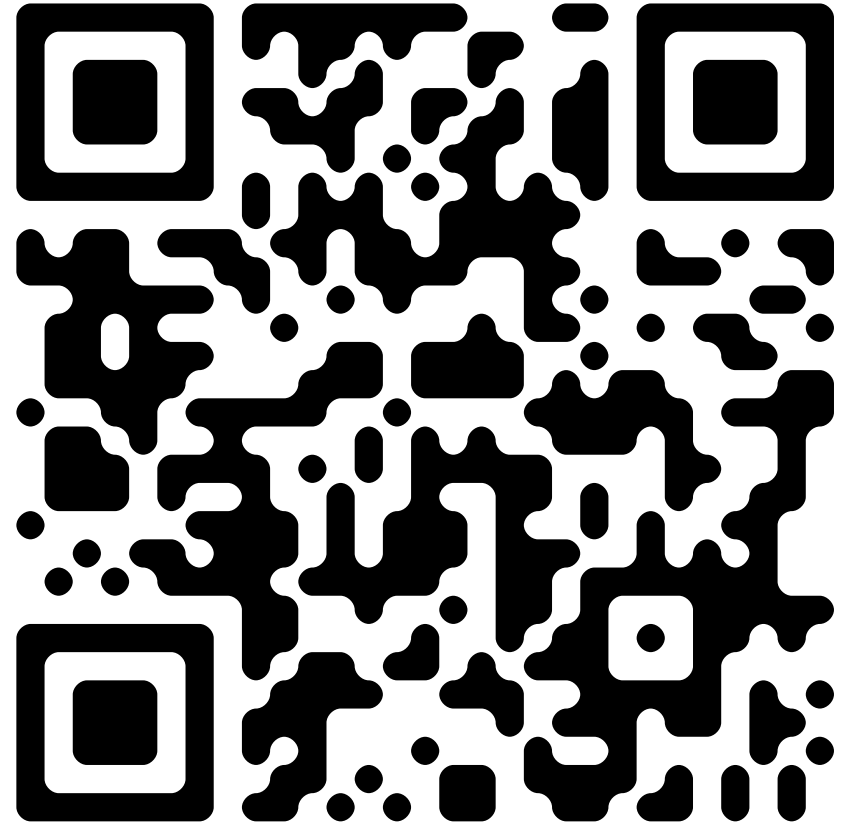
Лекция 3, 19 сентября, 2017

Лектор:

Дмитрий Северов, кафедра информатики 608 КПМ

dseverov@mail.mipt.ru

http://cs.mipt.ru/wp/?page_id=6077





Нормальные алгоритмы Маркова

1946 г.

Обозначения

Пусть $\sigma, \sigma', \alpha, \beta, \beta', \gamma$ - некоторые, возможно пустые, строки в алфавите V

причем $\sigma = \alpha\beta\gamma$ и $\sigma' = \alpha\beta'\gamma$

Тогда σ' есть результат подстановки β' в строку σ на место строки β .

Такая подстановка может быть задана функцией $f(\sigma, \alpha, \beta, \beta')$

Пример: $\sigma = \text{аааааа}$, $\beta = \text{аа}$, $\beta' = \text{b}$,

Нормальная подстановка

Функция $f(\sigma, \beta, \beta')$ задаёт нормальную подстановку, заменяя самое левое вхождение строки β в строку σ на строку β' .

Пусть $V = \{a, b, \dots\}$ – основной алфавит,
 $V' = \{A, B, \dots\}$ – вспомогательный, причем
 $V \cap V' = \emptyset$ и $\beta, \beta' \in (V \cup V')^*$

Тогда $\beta \rightarrow \beta'$ – это простое правило,
а $\beta \rightarrow^i \beta'$ – конечное правило подстановки.

Нормальный алгоритм Маркова

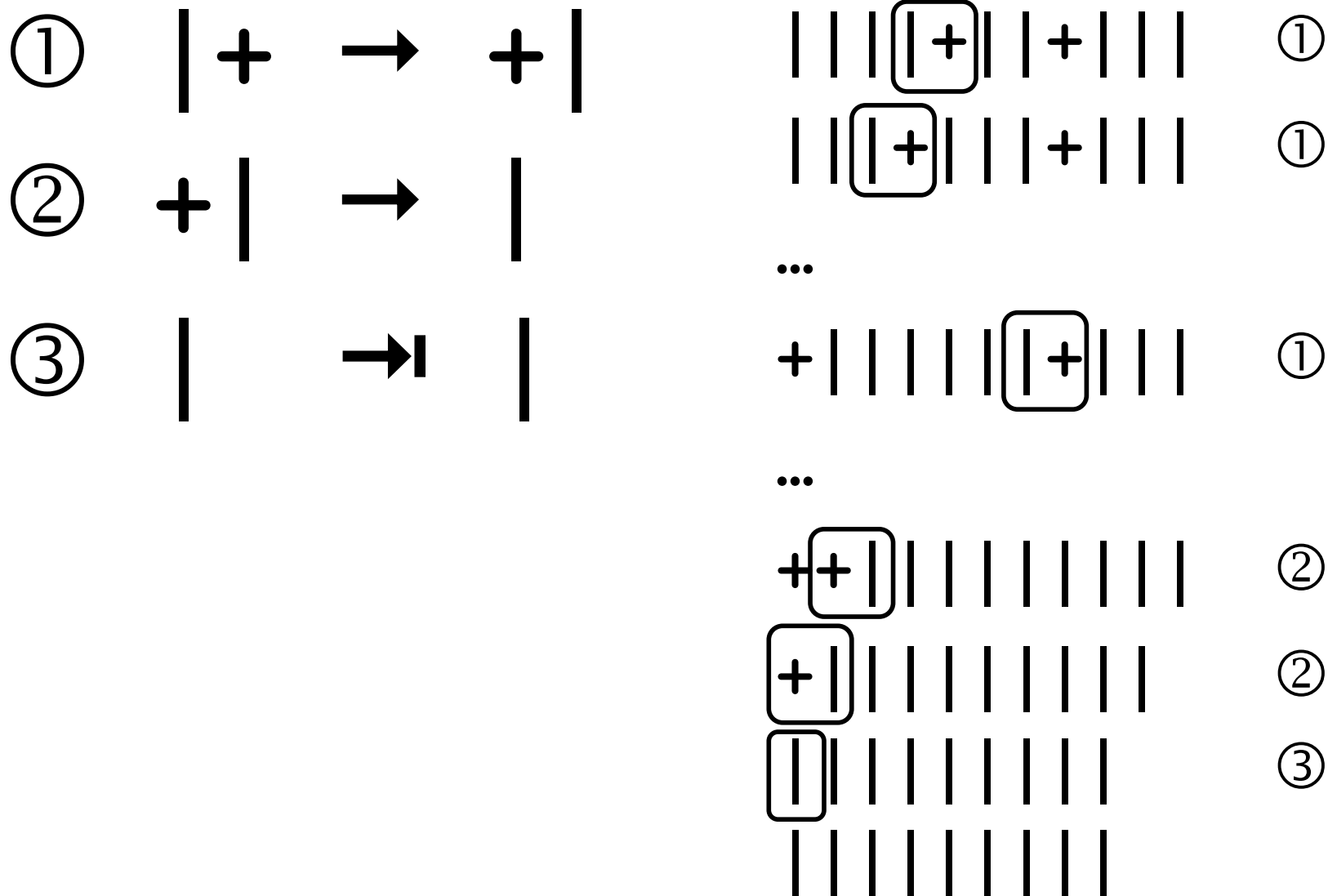
Упорядоченное множество подстановок видов

$$\beta \rightarrow \beta' \text{ и } \beta \rightarrow_1 \beta'$$

Исполнитель, просматривая слово σ слева направо, пытается последовательно применить к нему правила из множества подстановок.

1. Если удастся применить правило вида $\beta \rightarrow \beta'$, то процесс повторяется со словом σ' ;
2. Если – вида $\beta \rightarrow_1 \beta'$ – происходит результативный останов.
3. Если не удастся применить ни одно из правил – останов не результативный (аварийный).

Пример 1: сложение унарных чисел



Пример 2

Удалить из непустого слова в алфавите {a,b} первый символ. Пустое слово не менять.

a →
b →

bbb**a**bab → bbbbab

→ *

*a →
*b →

bbbabab → ***b**bbbabab → **bbbabab...

Пример 2

Удалить из непустого слова в алфавите {a,b} первый символ. Пустое слово не менять.

→ *

*a →| bbbabab → *bbbabab → **bbbabab...

*b →|

*a →|

*b →| bbbabab → *bbbabab → bbabab

→ *

Пример 2

Удалить из непустого слова в алфавите {a,b} первый символ. Пустое слово не менять.

*a → |

*b → | → * → ** ...

→ *

*a → |

*b → | bbbabab → *bbbabab → bbabab

* → | → * →

→ *

Композиция алгоритмов Маркова

- Пусть заданы два алгоритма R и S .
- Задача: построить алгоритм, который будет выполнять $S(R(\sigma))$.
- Проблема: как заблокировать подстановки R после того, как завершён R и заработал S

Композиция алгоритмов Маркова

1. Удвоим алфавит, добавив для каждого символа алфавита ξ его близнеца $\underline{\xi}$
2. Добавим еще два символа α и β , которые не входили в исходный алфавит.
3. Преобразуем R в R_α заменой правил вида $\dots \rightarrow^1 \zeta$ на $\dots \rightarrow \alpha\zeta$
4. Преобразуем S в S_β заменой
 1. ξ на $\underline{\xi}$
 2. правил вида $\dots \rightarrow^1 \zeta$ на $\dots \rightarrow \zeta\beta$

Композиция алгоритмов Маркова

1. $\xi\alpha \rightarrow \alpha\xi$ n правил

2. $\alpha\xi \rightarrow \alpha\xi$ n правил

3. $\xi\eta \rightarrow \xi\eta$ n^2 правил

4. $\xi\beta \rightarrow \beta\xi$ n правил

5. $\beta\xi \rightarrow \beta\xi$ n правил

6. $\xi\eta \rightarrow \xi\eta$ n^2 правил

7. $\alpha\beta \rightarrow \epsilon$

8. \underline{S}_β

9. R_α

Пример композиции

**R: перевод
двоичного
в унарное**

① $|0 \rightarrow 0| |$
 ② $1 \rightarrow 0|$
 ③ $0 \rightarrow$
 $\rightarrow |$

S: суммирование

④ $+ \rightarrow$
 ⑤ $\rightarrow |$

101+11 ②
 0|01+11 ②
 00||1+11 ②
 00||0|+11 ①
 00|0|||+11 ①
 000|||+11 ②
 000|||+0|1 ②
 000|||+0|0| ①
 000|||+00||| ③
 ...|||+||| ④
 ||| ⑤

Формальная схема

$ \alpha \rightarrow \alpha $	$\underline{+} \rightarrow$
$+ \alpha \rightarrow \alpha +$	$\alpha \rightarrow \alpha \beta$
$\alpha \rightarrow \alpha \perp$	
$\alpha + \rightarrow \alpha \underline{+}$	
$\perp + \rightarrow \underline{\perp} +$	
$\perp \rightarrow \underline{\perp} $	
$\underline{+} \rightarrow \underline{+} \perp$	
$\underline{+} + \rightarrow \underline{\underline{+}} +$	
$\perp \beta \rightarrow \beta \perp$	
$\beta \perp \rightarrow \beta $	
$ \perp \rightarrow $	
$\alpha \beta \rightarrow \alpha$	

11+1

0 | 1+1

0 | 0 | +1

00 | | | +1

00 | | | +0 |

0 | | | +0 |

| | | +0 |

| | | + |

$\alpha | | | + |$

$\alpha \perp | | + |$

$\alpha \underline{\perp} | | + |$

$\alpha \underline{\underline{\perp}} | | + |$

$\alpha \underline{\underline{\perp}} | | + |$

$\alpha \underline{\underline{\perp}} | | + |$

$\alpha \underline{\underline{\perp}} | | |$

$\alpha \beta \underline{\underline{\perp}} | | |$

$\alpha \beta | \underline{\underline{\perp}} | |$

$\alpha \beta | | \underline{\underline{\perp}} |$

$\alpha \beta | | | \underline{\underline{\perp}}$

$\alpha \beta | | | |$

$| | | |$

Вместо
 $\underline{\lambda} \rightarrow \beta$

Алгоритм Маркова сложения двоичных чисел

- ① $\beta \underline{1} \rightarrow 1\beta$
- ② $\beta \underline{0} \rightarrow 0\beta$
- ③ $\beta \rightarrow \varepsilon$

Перевод в унарную

$$|0 \rightarrow 0|| \quad \textcircled{1}$$

$$1 \rightarrow 0| \quad \textcircled{2}$$

$$0 \rightarrow \quad \textcircled{3}$$

Сложение

$$+ \rightarrow \quad \textcircled{4}$$

$$| \rightarrow \perp \quad \textcircled{\otimes}$$

Перевод в двоичную

$$\alpha \underline{\perp} \rightarrow \perp \alpha \quad \textcircled{5}$$

$$\alpha \perp \rightarrow \underline{1} \quad \textcircled{6}$$

$$\alpha \rightarrow \underline{0} \quad \textcircled{7}$$

$$\perp \rightarrow \alpha \perp \quad \textcircled{8}$$

$$\rightarrow \beta \quad \textcircled{9}$$

101+111 ②

Пример

0|01+111 ①

00||1+111 ②

00||0|+111 ①

00|0|||+111 ①

000|||+111 ②

000|||+0|11 ②

000|||+0|0|1 ①

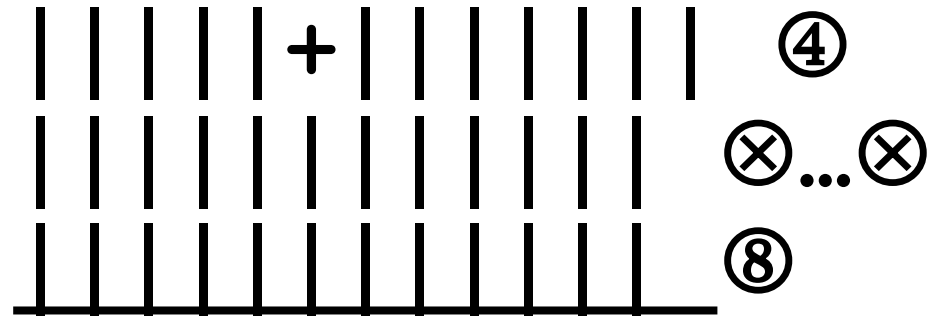
000|||+00||1 ②

000|||+00||0 ②

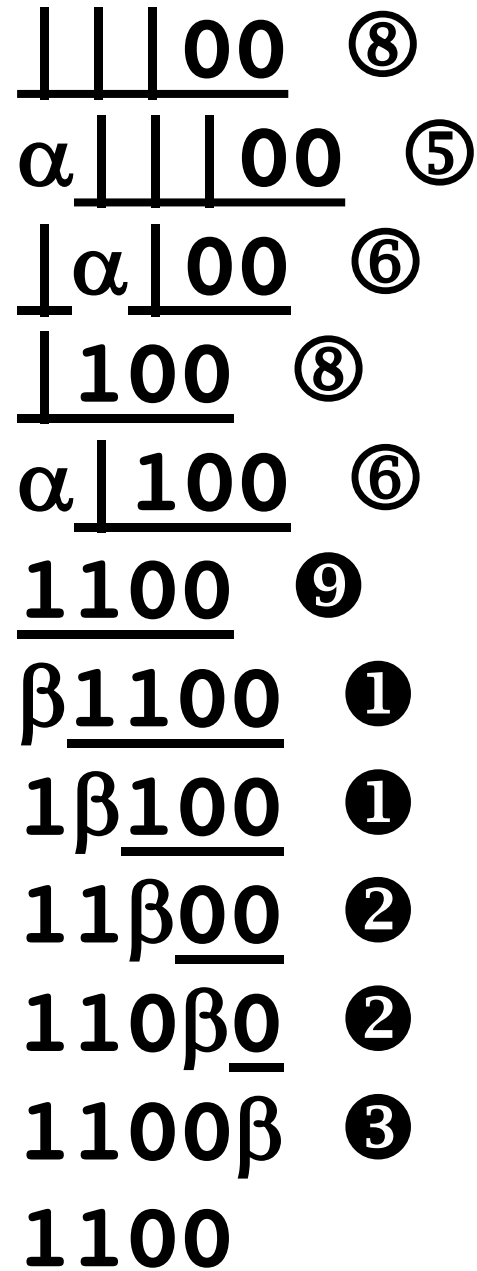
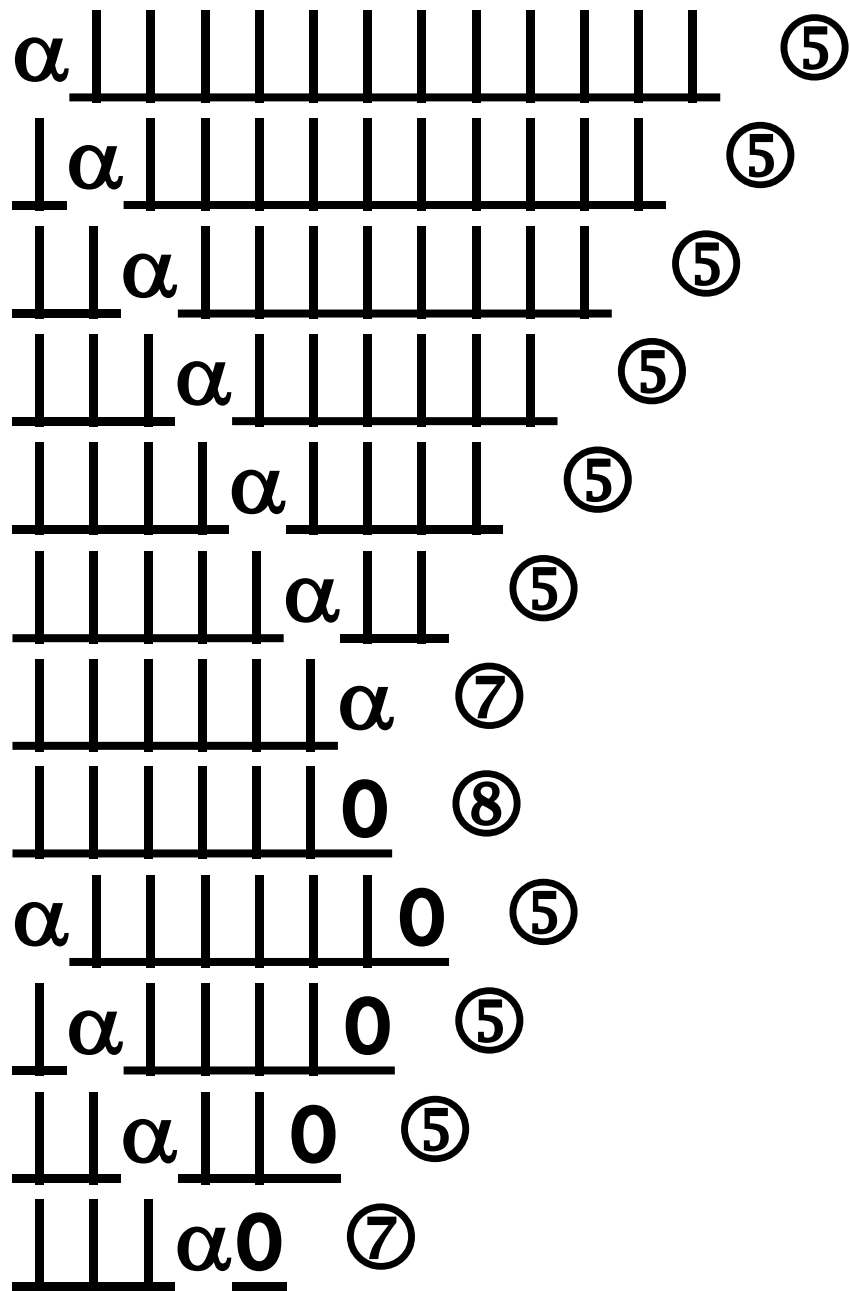
000|||+00|0|| ②

000|||+00|0||| ②

000|||+000||| ③...③



Пример



Проблема самоприменимости

› **Невозможно построить НАМ, который для любого другого НАМ выносил бы решение о том, произойдет или нет останов этого НАМ при его работе над данными, представляющими описание этого НАМ.**

Проблема самоприменимости

Самоприменимый

$$\textcircled{1} \ a \rightarrow b$$

поскольку

$$a \rightarrow b \textcircled{1}$$

$$b \rightarrow b$$

Несамоприменимый

$$\textcircled{1} \ a \rightarrow ab$$

поскольку

$$a \rightarrow ab \textcircled{1}$$

$$ab \rightarrow ab \textcircled{1}$$

$$abb \rightarrow ab \textcircled{1}$$

...